

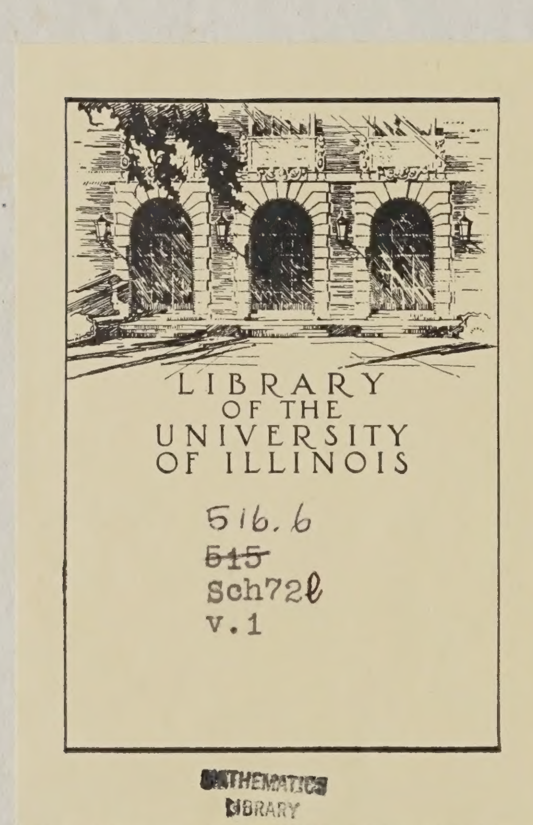
Lehrbuch
der
Darstellenden Geometrie
nach
Monge Géométrie descriptive
vollständig bearbeitet

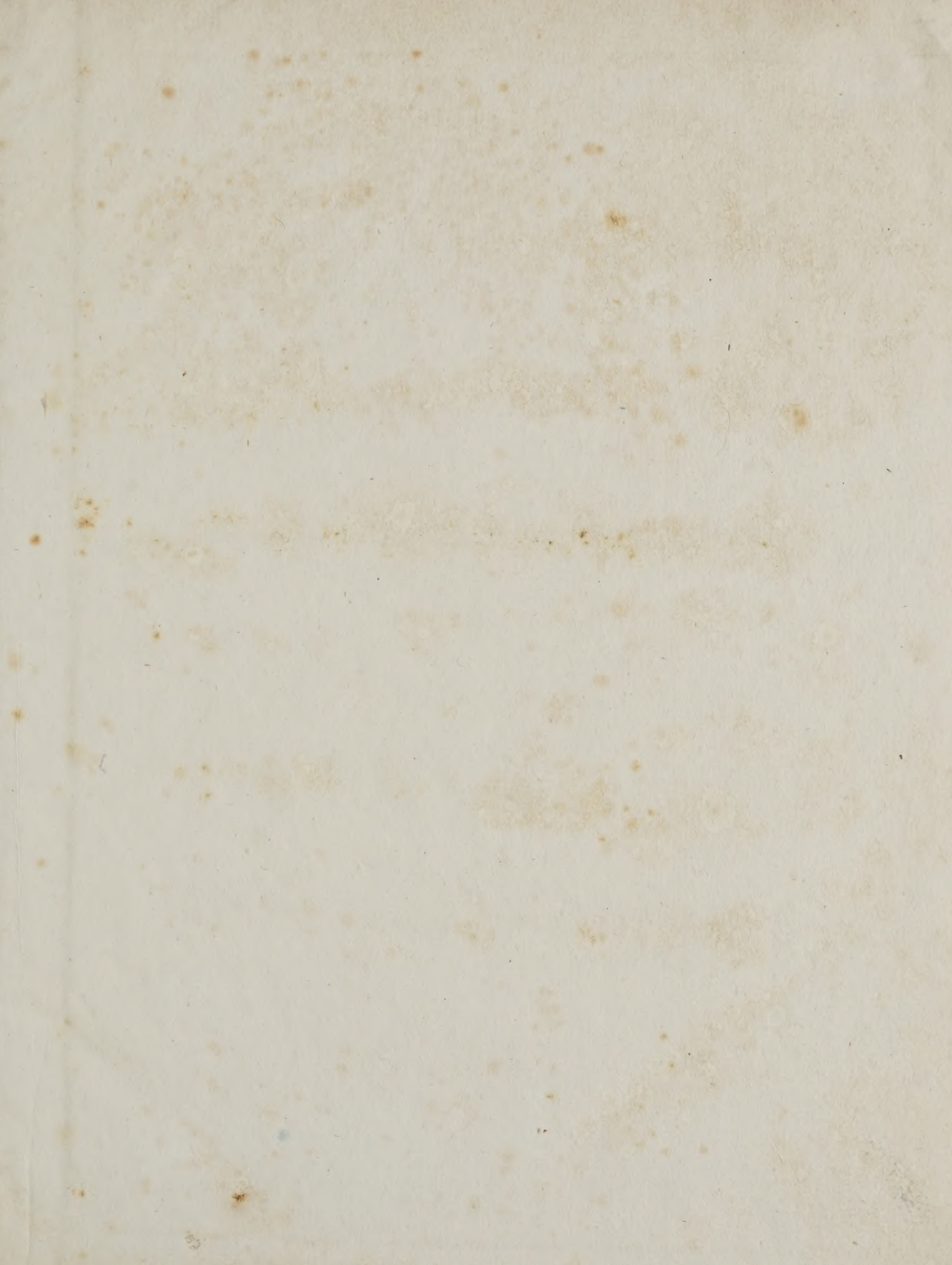
von

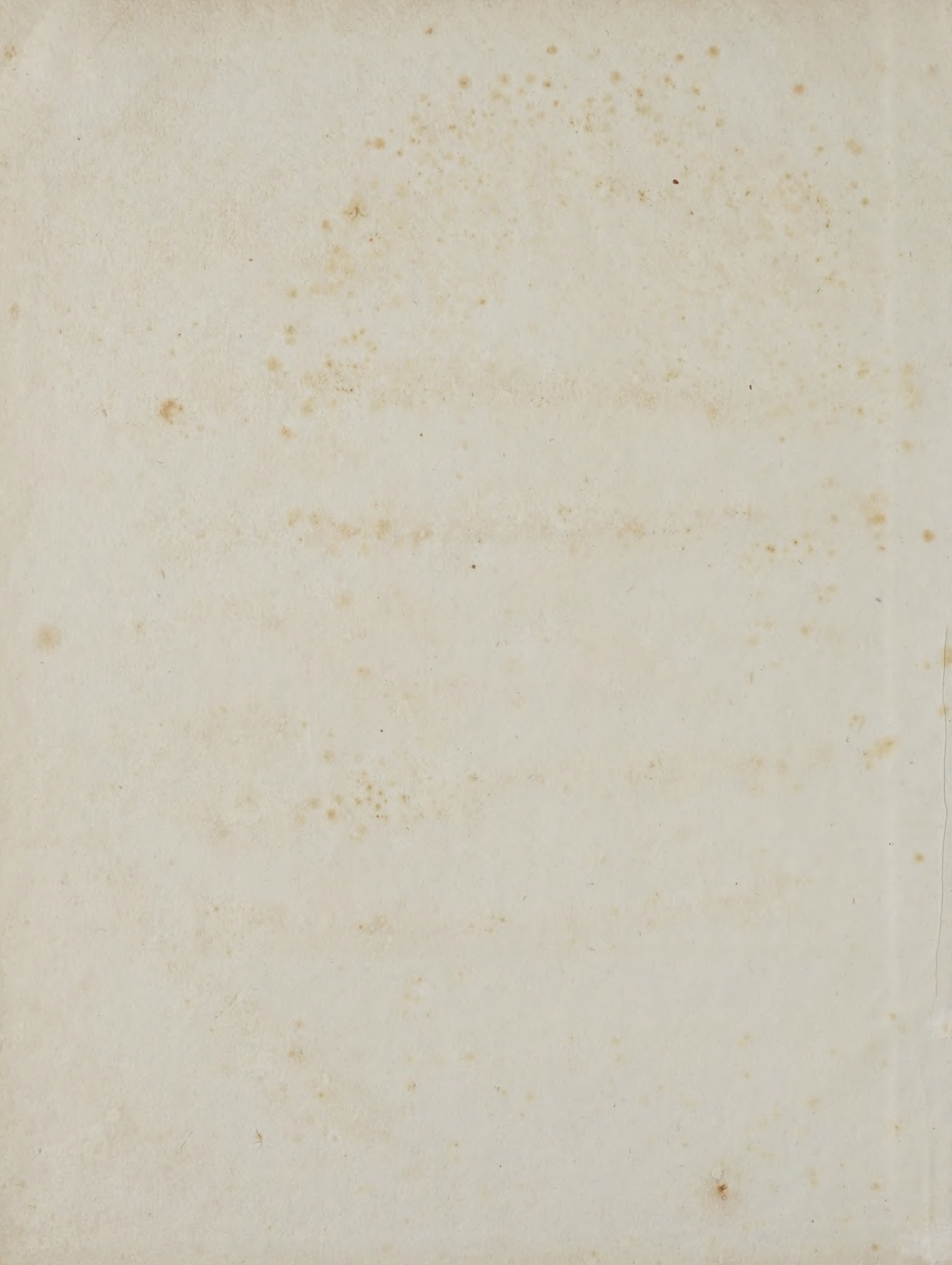
Guido Schreiber
vormaligem Lieutenant in der Großherzoglich-Badischen Artillerie,
Lehrer der geometrischen und topographischen Zeichnung an
der polytechnischen Schule zu Karlsruhe.

Erste Lieferung.
Mit 33 Steintafeln.

Karlsruhe und Freiburg
in der Herder'schen Kunst- und Buchhandlung.
1828.











CASPARD MONGE.

Lehrbuch

der

Darstellenden Geometrie

nach MONGE's Géométrie descriptive

vollständig bearbeitet

von

Guido Schreiber,

Vormaligem Lieutenant in der Großherzoglich Badischen Artillerie, Lehrer der geometrischen und topographischen Zeichnung an der polytechnischen Schule zu Karlsruhe.

La géométrie descriptive doit devenir un jour une des parties principales de l'éducation nationale, parce que les methodes qu'elle donne sont aussi necessaires aux artistes, que le sont la lecture, l'ecriture et l'arithmetique.

Monge: séances des écoles normales.

Erste Lieferung.

Mit 33 Stein-Tafeln.

Karlsruhe und Freyburg,

in der Herder'schen Kunst- und Buchhandlung.

1828.

Kursus

der

Darstellenden Geometrie;

nebst ihren Anwendungen auf die Lehre der Schatten und der Perspektive, die Konstruktionen in Holz und Stein, das Defilement und die topographische Zeichnung,

von

Guido Schreiber,

Vormaligem Lieutenant in der Großherzoglich Badischen Artillerie, Lehrer der geometrischen und topographischen Zeichnung an der polytechnischen Schule zu Karlsruhe.

Erster Theil.

Reine Geometrie.

Karlsruhe und Freiburg,

in der Herder'schen Kunst- und Buchhandlung

1 8 2 8.

Seiner königlichen Hoheit

dem Großherzog

Ludwig von Baden

meinem gnädigsten Fürsten unterthänigst gewidmet.



Durchlauchtigster Großherzog,
Gnädigster Fürst und Herr!

Es war unserer Zeit vorbehalten, die unermeßlichen Resultate der mathematischen und Naturwissenschaften auf das Leben anzuwenden und dem Kunst- und Gewerbfleiße dadurch neue Bahnen zu öffnen.

Was der Höchstselige Karl Friedrich, einer der ersten Fürsten, welche diese glückliche Bestrebung erkannten, mit schönem Erfolge begonnen, das haben Eure Königliche Hoheit im größeren Umfange ausgeführt, und die seegenreichen Wirkungen, werden eines der glänzendsten Denkmale Allerhöchst Dero glorreichen Regierung seyn.

Monge ist als Begründer der ächten polytechnischen Lehrart anzusehen, und indem ich der deutschen Bearbeitung seines unsterblichen Werkes den verehrten Namen Eurer Königlichen Hoheit vorsetze, wollte ich nur

ein Zeichen jener allgemeinen Huldigung darbringen, welche Badens dankbare Bewohner dem edlen Stifter unsres rasch aufblühenden polytechnischen Instituts auf immer zollen werden.

In tiefster Ehrfurcht ersterbend

Eurer Königlichen Hoheit

unterthänigst treu gehorsamster

G. Schreiber.

Vorrede.

Als im Jahre 1794, nach dem Sturze der Schreckensregierung das französische Direktorium die Wiederbelebung des öffentlichen Unterrichtes als eines der dringendsten Bedürfnisse erkannte, ward unter dem Namen der école normale ein Institut gegründet, dessen Zweck seyn sollte, eine Masse von Lehrern für den Bedarf von ganz Frankreich zu bilden. An die Spitze der Anstalt waren die ausgezeichnetsten Gelehrten berufen, über die man damals verfügen konnte, und die Zahl von fünfzehn hundert Schülern aus allen Departementen ausgewählt. *)

Monge, insbesondere mit der Organisation der Schule beauftragt, trug hier zum erstenmale öffentlich seine Géométrie descriptive vor. Das Programm über diesen Kurs spricht Gegenstand und Zweck desselben in folgenden Stellen aus.

*) Die école normale hat zu Professoren, Lagrange, Laplace für die Mathematik, Monge für die géométrie descriptive, Hauy für die Physik, Berthollet für Chemie, Daubenton für Naturgeschichte, Thouin für Agrikultur, Buache, Mantelle und Volney für Geographie und Geschichte, Laharpe, Garat, Bernardin-de-Saint-Pierre, Sicart für Grammatik, Litteratur und Moral. Lacroix und Hachette waren Professeurs-adjoints für die Géométrie descriptive.

„Um die französische Nation aus der Abhängigkeit von der ausländischen Industrie, worin sie sich bisher befand, zu ziehen, muß man erstlich die öffentliche Erziehung auf die Kenntnisse jener Gegenstände leiten, welche Genauigkeit verlangen, was bisher gänzlich vernachläßigt wurde, und man muß die Hände unserer Künstler an die Handhabung von Werkzeugen aller Art gewöhnen, welche dazu dienen, Präzision in die Arbeiten zu bringen, und die verschiedenen Grade davon zu messen: alsdann werden die Konsumenten, für die Genauigkeit empfänglich, diese in den verschiedenen Werken verlangen können, und den nöthigen Werth darauf legen; unsere Künstler dagegen, von dem frühesten Alter an damit vertraut, werden sie zu erreichen im Stande seyn.“

„Man muß zweytens die, für die Fortschritte der Industrie unerläßlichen Kenntnisse einer großen Menge von Naturerscheinungen gemeinnützig machen. Endlich muß man unter unsern Künstlern, die Kenntniß der Verfahrungsarten jener Künste und Maschinen verbreiten, deren Zweck ist, entweder die Handarbeit zu verringern, oder den Resultaten der Arbeit mehr Gleichförmigkeit und Pünktlichkeit zu geben, und unter dieser Beziehung muß man gestehen, daß wir viel von den fremden Nationen zu lernen haben.“

„Alle diese Absichten lassen sich nicht anders erreichen, als indem man der öffentlichen Erziehung eine neue Richtung giebt. Es geschieht dieses zuerst, indem man alle jungen Leute von Intelligenz sowohl, als auch jene, welche schon ein Vermögen besitzen, mit der Anwendung der darstellenden Geometrie vertraut macht, damit sie eines Tags im Stande sind, von ihrem Kapital, sowohl für sich, als für den Staat, einen vortheilhafteren Gebrauch zu machen, und damit auch jene, welche kein anderes Vermögen besitzen als ihre Erziehung, einstens ihren Arbeiten mehr Werth zu geben vermögen. Diese Kunst hat zwey Hauptgegenstände:

„Der erste besteht darin, auf Zeichnungsflächen, die nur zwey Dimensionen haben,

mit Genauigkeit alle Gegenstände darzustellen, welche drey Dimensionen haben, und welche einer strengen Definition fähig sind.«

»Unter diesem Gesichtspunkte ist sie eine nothwendige Sprache für den Mann von Genie, welcher einen Entwurf erdenkt, für diejenigen, welche die Ausführung desselben leiten, und endlich für die Künstler selbst, welche die verschiedenen Theile davon verfertigen sollen.«

»Der zweyte Hauptgegenstand der darstellenden Geometrie ist, aus der genauen Beschreibung der Körper alles dasjenige abzuleiten, was nothwendiger Weise aus ihren Formen und ihren gegenseitigen Stellungen folgt. In diesem Sinne ist sie ein Mittel die Wahrheit aufzusuchen; sie bietet beständige Beyspiele des Ueberganges vom Bekannten zum Unbekannten dar, und weil sie immer auf Gegenstände angewendet wird, die der größten Einleuchtendheit fähig sind, so ist es nothwendig, sie in den Plan einer öffentlichen Erziehung aufzunehmen. Sie ist nicht nur geeignet die Verstandesfähigkeiten eines großen Volkes zu üben, und dadurch zur Vervollkommnung des menschlichen Geschlechtes beyzutragen, sondern sie ist auch unerläßlich für alle Arbeiter, deren Entzweck ist, den Körpern gewisse bestimmte Formen zu geben; und besonders aus dem Grunde, weil die Methoden dieser Kunst bis jetzt so wenig verbreitet, oder selbst gänzlich vernachläßigt waren, geschahen die Fortschritte unseres Gewerbfleißes so langsam.«

»Man wird daher viel beytragen, der öffentlichen Erziehung eine vortheilhafte Richtung zu geben, wenn man unsere angehenden Künstler mit den Anwendungen der darstellenden Geometrie auf die, den meisten Künsten nöthigen graphischen Konstruktionen vertraut macht, und wenn man diese Geometrie zur Verzeichnung und Bestimmung der Elemente von Maschinen gebraucht, mittelst deren der Mensch, indem er die Kräfte der Natur benützt, sich bey seinen Verrichtungen, so zu sagen, keine andere Arbeit vorbehält, als die seines Verstandes.«

Als vollkommenes Lehrgebäude unter diesen so eben ausgesprochenen Gesichtspunkten, ist Monge der Schöpfer der darstellenden Geometrie, obgleich einzelne Verfahrungsarten derselben längst im Leben und in Ausübung waren.

Die Kunst auf einem Zeichnungsblatte alle vollkommen erklärbaren Körper so darzustellen, daß davon alle Maaße dieses Körpers abgenommen werden können, mußte schon mit der Entwicklung der Baukunst gleichen Schritt gehen. Eine solche Darstellung kann aber nur mittelst der Projektionen geschehen, und diese Zeichnungsmethode, die man auch die geometrische nennt, bildet die Grundlage der darstellenden Geometrie.

Ueber den Zustand der geometrischen Zeichnungskunst im Alterthume, ist uns Nichts bekannt. Die erste Schrift aus dem Ende des mittleren Zeitabschnittes, in welcher die Lehre von den Projektionen zwar nicht vorgetragen, sondern als ein den Steinmetzen bekanntes Verfahren behandelt wird, ist Albrecht Dürers bekannte 1525 erschienene „Underweisung der messung mit dem zirkel und richtscheyt, in Linien ebenen und gantzen corporen", welches Buch auch die ersten gedruckten Vorschriften der Perspektive enthält.

Die Kunst kühne und zusammengesetzte Gewölbe zu erbauen, stand damals auf sehr hoher Stufe, und folglich gewiß auch die Kunst des Messens und Aufreissens; beydes war jedoch unter eidlichem Siegel bewahrtes Zunftgeheimniß der Steinmetzen und gieng auch mit dieser Zunft unter.

Die Franzosen, welche uns in der Steinmetzenkunst später überbothen, hatten hierin auch die ersten Schriftsteller *). Philibert de l' Orme Almosenier Heinrichs II. von Frankreich beschrieb in seiner Abhandlung über Architektur, die gegen das Ende des 16ten Jahrhunderts erschien, einige Verfahrungsarten dieser Kunst. Im Jahre 1642 gab

---

*) Man sehe Theorie et pratique de la coupe de pierres et des bois par Frezier, Strasbourg 1737; discours preliminaire.

Maturin Jousse in seinem Werke, secrets de l' architecture einige Risse heraus. Ihm folgten der Pater Derand und der Lyoner Baumeister Desargues in ausgedehnteren Abhandlungen. Das Traité de la coupe des pierres par de la Rue, was 1728 erschien, enthält eine große Anzahl ziemlich genauer Risse, von denen viele bey der Collection des épures à l'usage de l'école polytechnique zu Grunde gelegt wurden. Alle diese Werke übrigens beschränken sich auf eine reine, von allen Beweisen entblöste Praxis.

Bey keinem findet man bemerkt, daß die Lösung eines jeden geometrischen Problemes aus zwey ganz verschiedenen Theilen bestehe, aus einem rein theoretischen, welcher die Auffindung und Anwendung bekannter Vordersätze auf den vorliegenden Fall begreift, und aus einem zweyten praktischen, nemlich der Ausführung der nöthigen Operationen, um das gesuchte Resultat zu erhalten.

Frezier, in seiner noch jetzt gesuchten Abhandlung über die Steinschnitte und in seinen éléments de stéréotomie versuchte zuerst diese Trennung des rein geometrischen und rein technischen durchzuführen. Für die Vervollkommnung der Projektionsmethoden ist jedoch auch hier nur Unbedeutendes geschehen.

Im Jahre 1748 war unter dem Minister d'Argenson die Genieschule zu Mezieres errichtet worden. Monge zu Beaune im Jahre 1746 geboren und durch einen glücklichen Zufall frühzeitig nach Mezieres geführt, wurde an diese Anstalt gezogen. Die Aufgabe des Defilements, einer Operation, deren Zweck ist, den Umriß und die Höhen der Festungswerke, bey geringst = möglichsten Kosten, so zu verbinden, daß die Vertheidiger dadurch gegen die geraden Schüsse des Angreifers gedeckt werden, diese Aufgabe, deren Lösung einen großen Theil der darstellenden Geometrie umfaßt, und welche von den Offizieren und Professoren der Schule zu Mezieres mit großem Eifer betrieben wurde, scheint Monge insbesondere auf die abstrakte Betrachtung des Raumes nach drey Abmessungen geführt, und seiner Géométrie descriptive das Daseyn gegeben zu haben,

Jedoch erst an dem Eröffnungskurse der Nomalschule im Jahre 1795, einer Epoche, wo Monge durch seine mannigfachen analytisch = geometrischen Untersuchungen sich bereits einen hohen wissenschaftlichen Ruf gegründet hatte, war es ihm vergönnt, alle Schleyer von seinem Lehrgebäude zu heben.

Die seit dem so bekannt gewordene Géométrie desctiptive Monge's enthält die von Stenographen nachgeschriebenen Vorlesungen an der Normalschule, die von dem Verfasser durchgesehen, zuerst in den Séances des écoles normales bekannt gemacht, und hieraus unverändert in mehreren Auflagen wieder abgedruckt wurden.

Nach dem ursprünglichen Zwecke der Normalschule beschränkte sich Monge, in seine Vorträge nur einfache, elementare Gegenstände aufzunehmen. Im Laufe der Ereignisse nach Italien abgerufen, und später an die Spitze des Instituts von Egypten gestellt, hatte Monge den Unterricht der Géométrie descriptive in die Hände des Professors Hachette übergeben. Unter diesem würdigen Nachfolger und durch den Eifer der Schüler erhielt die Wissenschaft bald eine weitere Entwicklung. Die Normalschule hatte inzwischen ihren Namen mit dem der polytechnischen vertauscht, und nun die Bestimmung erhalten, Männer für den öffentlichen Dienst zu bilden, nemlich für alle Zweige des Ingenieurwesens und der Artillerie. Da der Unterricht deshalb nothwendig sich über die elementaren Gränzen erheben mußte, so wurde nach einem Beschlusse des Instruktionsrathes der polytechnischen Schule, um die entstandene Lücke auszufüllen, im Jahre 1811 einer neuen Auflage der Géométrie descriptive ein Supplement von Hachette beygefügt, das jene Entwicklungen und Erweiterungen enthält. Monge selbst hat seit 1795 über diesen Gegenstand nichts mehr geschrieben.

Die Géométrie descriptive Monge's, und Hachette's erstes Supplement dazu haben mir bey der Bearbeitung des ersten Theiles des vorliegenden Werkes zur Grundlage gedient. Daß bey Einflechtung eines so mannigfaltigen Stoffes, von der Einheit und

der wunderbaren Rundung jenes unübertrefflichen Werkes viel verloren gehen mußte, springt wohl von selbst in die Augen. Ich habe mich bestrebt, diesen nothwendigen Verlust so gering als möglich zu machen, indem ich mich von dem Gange und der Eintheilung meines Originales so wenig entfernte als mir thunlich war. Vor allem glaubte ich bey dem Stande des Unterrichtes in Deutschland, nicht auf jene von Hachette vorgeschlagene Trennung eingehen zu dürfen, welcher, Geometrie von drey Dimensionen das Ganze aller auf den Raum und seine Formen bezüglichen Lehrsätze nennen will, und darstellende Geometrie, die Wissenschaft, welche den Gebrauch von Zirkel und Lineal zur Lösung der Aufgaben der Geometrie von drey Dimensionen, lehrt. Die darstellende Geometrie würde durch eine solche Behandlung fast auf eine nackte und trockene Projektionslehre heruntergebracht, woran wir in der That keinen Mangel leiden.

Einer meiner Arbeit entgegenstrebenden, wirklich großen Schwierigkeit, muß ich hier erwähnen, es ist die überall, besonders auch im Deutschen, so große Unvollkommenheit der geometrischen Sprachweise. Die neueren Theorien über die Geometrie von drey Dimensionen sind großentheils französischen Ursprunges, und die meisten unserer großen Geometer, wie Euler, haben ihre Muttersprache einer wissenschaftlichen Schärfe und Klarheit nicht fähig gehalten. Ob die von mir gebrauchten, noch nicht gangbaren Benennungen den Vorzug vor anderen versuchten verdienen, muß der Erfolg mich belehren. Ich habe es jedoch stets für gut gehalten, einem jedem Dinge einen Namen zu geben, und wenn keiner vorhanden war, einen zu machen.

Nur ein einziger Fall soll hier angeführt werden. Manche krumme Flächen bestehen aus mehreren deutlich unterschiedenen Theilen, deren Form und Anzahl durch die Erzeugungsart der Fläche bedingt ist Einen solchen Theil, welcher sich sehr gut mit einem Aste einer Kurve vergleichen läßt, nennen die Franzosen nappe de surface, ein Ausdruck, der sich wirklich durchaus nicht nachbilden läßt. Es ist nun wahrhaft merkwürdig anzuse-

hen, wie mühsam einige deutsche Geometer und Analytiker sich dehnen und winden, um dieser ganzen Eintheilung der Flächen in abgesonderte Theile auszuweichen, oder in einzelnen nicht zu umgehenden Fällen nothdürftig passende Umschreibungen aufzufinden. Für nappe de surface habe ich die Benennung Flächennetz gebraucht, wogegen ich aber jeden passendern oder bezeichnendern Ausdruck anzunehmen mich gern bescheide. Bey dieser Gelegenheit glaube ich mit dem berühmten Verfasser der Developpemens de Géométrie sagen zu müssen: es wäre sehr zu wünschen, daß diejenigen, welche die wahre Geometrie kultiviren, den Muth hätten, das Beyspiel der neueren Chemiker nachzuahmen, und ihre Sprachweise umzuschaffen; denn es ist wohl zu verwundern, daß die Benennungen einer Wissenschaft, wo alles Uebereinstimmung und Pünktlichkeit ist, so unzusammenhängend und oft so wenig präzis sind.

Karlsruhe, im April 1828.

G. Schreiber.

Angabe
der
nach Monge über reine darstellende Geometrie erschienenen, und bey Bearbeitung dieses ersten Theiles benützten Werke.

Essais de géométrie sur les plans et les surfaces courbes. par S. F. Lacroix. in 8. Die erste Auflage kam schon im Jahre 1795 heraus. Das Buch bildet eigentlich den vierten Theil von Lacroix vollständigem mathematischen Kurse.

Traité de géométrie descriptive par Potier in 8. mit 2 Kupfertafeln. Das Werkchen erschien zuerst in Petersburg, und ward 1817 in Paris wiederum abgedruckt, es zeichnet sich durch seine vielleicht zu große, übrigens mit aller Schärfe des Raisonnements verbundene Gedrängtheit von allen ähnlichen auffallend aus.

Second Supplement à la géométrie descriptive par Hachette in 4. Paris 1818. Der Gegenstand dieses zweyten Supplementes ist insbesondere die graphische Konstruktion der Normalen, der oskulirenden Ebenen und der Krümmungshalbmesser der doppelt gekrümmten Kurven. Demselben beygefügt ist eine Uebersetzung von John Leslie's geometrical analysis, eine als Vorübung für die darstellende Geometrie sehr nützliche Sammlung von Problemen der ebenen Geometrie.

Traité de la géométrie descriptive par L. L. Vallèe. 1 vol. in 4. mit einem Atlas von 60 Planen. Paris 1819.

Traité de géométrie descriptive, comprennant les applications de cette géométrie aux ombres, à la perspective et à la stéréotomie avec 72 Planches, par Hachette. Paris 1822. Die reine Geometrie dieses Werkes ist eine vergrößerte Umarbeitung des ersten Supplementes zu Monge.

Das Verdienst der ersten deutschen Bearbeitung der géométrie descriptive hat sich Creizenach erworben, durch seine Anfangsgründe der darstellenden Geometrie, die 1821 in Mainz herauskamen.

Seitdem sind unter dem Titel von Konstruktionslehren, entwerfender Geometrie u. s. w. nur Bearbeitungen erschienen, die sich auf Elementargegenstände beschränken.

Unter den nicht reine darstellende Geometrie enthaltenden Abhandlungen sind besonders zu bemerken.

Correspondance sur l'école polytechnique par Hachette 3 Bde in 8. Man findet in diesen Heften, eine Sammlung interessanter Aufgaben, über darstellende Geometrie, Optik Astronomie. u. s. w.

Das Journal de l'école polytechnique enthält gleichfalls eine Reihe ähnlicher Aufsätze.

Developpements de géométrie, pour faire suite à la géométrie descriptive et à la géométrie analytique de M. Monge, par Ch. Dupin. 1 Vol. in 4. Eine vollständige Theorie der Krümmung der Flächen und Linien.

Applications de géométrie et de mecanique à la marine, aux ponts et chaussèes etc. pour faire suite aux developpements de géométrie par Ch. Dupin. in 4. Paris 1822.

Traité des propriétés projectives des figures par J. V. Poncelet in 4. Paris 1822. Ein nicht nur, wie der Titel besagt nützliches, sondern fast unentbehrliches Buch für alle jene, welche die darstellende Geometrie weiter kultiviren wollen.

Es enthält eine Menge der anwendungsreichsten und merkwürdigsten Sätze über die Eigenschaften der Figuren und insbesondere eine vollständige rein geometrische Theorie der Kurven und krummen Flächen der zweyten Ordnung, auf die Lehre der Projektionen und die Gesetze der geometrischen Stetigkeit gegründet.

Géométrie et Meachanique des arts et métiers par Ch. Dupin, 3 Vol. in 8. Paris 1823.

Lehrbuch

der

Darstellenden Geometrie.



Darstellende Geometrie.

Erstes Buch.

Von der geraden Linie und Ebene.

Erstes Kapitel.

Erklärungen und Grundbegriffe.

1. Die darstellende Geometrie besteht aus zwey Haupttheilen: einmal lehrt sie, wie auf einem Zeichnungsblatt, das nur zwey Dimensionen hat, nemlich Länge und Breite, alle natürlichen Körper vorgestellt werden können, welche drey Dimensionen haben: Länge, Breite und Höhe; vorausgesetzt, daß diese Körper streng bestimmt werden können.

Zweitens zeigt sie, wie nach einer genauen Beschreibung, die Formen der Körper erkannt werden können, und wie daraus alle Wahrheiten abzuleiten seyen, die aus der Gestalt und der gegenseitigen Stellung jener Körper entspringen.

Wir werden nach einander die, zum Theil auf dem Wege langer Erfahrung gefundenen Methoden entwickeln, um diese doppelte Aufgabe zu lösen.

2. Da die Oberflächen aller Naturkörper, als aus Punkten zusammengesetzt, betrachtet werden können, so ist das erste Erfoderniß, bey Erörterung dieses Gegenstandes, die Art anzugeben, wie man die Stellung eines Punktes im Raume ausdrückt.

Der Raum ist unbegränzt, alle seine Theile sind vollkommen ähnlich, sie haben nichts, was sie charakterisire, und keiner derselben kann als Vergleichungsausdruck dienen, um die Stellung eines andern Punktes zu bezeichnen.

Man muß demnach nothwendiger Weise, um die Stellung eines Punktes im Raume zu bestimmen, diese Stellung auf einige andere Gegenstände beziehen, die von den, sie einschließenden Theilen des Raumes ausgezeichnet, und die selbst, ihrer Stellung nach sowohl demjenigen bekannt sind, welche erklärt, als auch dem, welcher die Erklärung verstehen will, damit aber auch die Verfahrungsart eine leichte und tägliche Anwendbarkeit erlangen könne, so müssen diese Gegenstände so einfach seyn als möglich, und ihre Stellung, die am leichtesten denkbare.

3. Unter allen einfachen Gegenständen, wollen wir diejenigen aufsuchen, welche die meiste Bequemlichkeit zur Bestimmung der Stellung eines Punktes darbieten, und weil die Geometrie nichts Einfacheres aufweis't, als den Punkt, so wollen wir untersuchen, in welche Art von Betrachtungen man gezogen würde, wenn man, um die Stellung eines Punktes zu bestimmen, denselben auf eine gewisse Anzahl anderer Punkte bezöge, deren Stellung bekannt wäre, und damit diese Auseinandersetzuug mehr Klarheit erhalte, wollen wir diese bekannten Punkte mit den aufeinander folgenden Buchstaben A, B, C, ꝛc. bezeichnen.

Nehmen wir zuerst an, es läge in der Definition der Stellung des Punktes, daß er einen Fuß von dem bekannten Punkt A entfernt sey.

Jedermann weiß, daß das Eigenthümliche der Kugelfläche darin besteht, daß alle ihre Punkte gleichweit vom Mittelpunkte abliegen. Demnach giebt dieser Theil der Definition an, daß der zu bestimmende Punkt die nemliche Eigenthümlichkeit habe, wie die sämmtlichen Punkte einer Kugelfläche, deren Mittelpunkt in A ist, und deren Halbmesser einen Fuß beträgt. Aber die Punkte der Kugelfläche sind die einzigen im ganzen Raume, die diese Eigenthümlichkeit haben, denn alle jene Punkte des Raumes, welche, in Bezug auf den Mittelpunkt, außerhalb dieser Fläche liegen, sind weiter als einen Fuß von dem Mittelpunkte entfernt, und alle jene, welche sich zwischen dem Mittelpunkte und der Fläche befinden, sind im Gegentheile, weniger als einen Fuß von diesem Mittelpunkt entfernt, daher besitzen nicht nur sämmtliche Punkte der Kugelfläche die in der Proposition angegebenen Eigenheiten, sondern sie sind auch die einzigen, welche dieselben besitzen, daher endlich drückt diese Proposition aus, daß der gesuchte Punkt einer von denen einer Kugelfläche sey, deren Mittelpunkt in A liegt und deren Halbmesser einen Fuß beträgt. Dadurch ist der Punkt wirklich von einer unendlichen Menge anderer, im Raume gelegener Punkte unterschieden, aber er ist noch mit allen Punkten der Kugelfläche vermengt, und es sind neue Bedingungen nöthig, um ihn unter denselben zu erkennen.

Nehmen wir sofort an, daß nach der Definition der Stellung des Punktes, derselbe zwey Fuß von einem zweyten bekannten Punkte B entfernt seyn soll: so ist einleuch-

tend, daß, indem man bey dieser zweyten Bedingung, wie bey der Ersten urtheilt, der Punkt auch einer von denen einer zweyten Kugelfläche seyn muß, deren Mittelpunkt in B ist, und deren Halbmesser zwey Fuß beträgt. Dieser Punkt, da er sich zu gleicher Zeit auf der ersten Kugelfläche und auf der Zweyten befinden muß, kann nur noch mit jenen verwechselt werden, welche beyden Flächen gemein sind, und die in ihrem gemeinschaftlichen Durchschnitt liegen. Nun aber, wie wenig man auch mit geometrischen Betrachtungen vertraut seyn mag, ist bekannt, daß der Durchschnitt zweyer Kugelflächen der Umfang eines Kreises ist, dessen Mittelpunkt in der Geraden liegt, die die Mittelpunkte der zwey Kugeln verbindet, und dessen Ebene senkrecht auf dieselbe Gerade ist. Der gesuchte Punkt ist daher, vermöge der zwey vereinigten Bedingungen, wirklich von allen denen unterschieden, welche auf den Oberflächen der zwey Kugeln liegen, und er kann nur noch mit jenen des Umkreises vermengt werden, welche sämmtlich die beyden ausgesprochenen Bedingungen besitzen, und zwar sie allein besitzen. Es bedarf daher noch einer dritten Bedingung, um denselben auszuzeichnen.

Nehmen wir endlich an, daß der Punkt sich drey Fuß von einem dritten bekannten Punkte C entfernt befinden soll. Diese dritte Bedingung versetzt denselben unter sämmtliche Punkte einer dritten Kugelfläche, deren Mittelpunkt in C ist, und deren Halbmesser drey Fuß beträgt; und da wir gesehen haben, daß der Punkt im Umfange eines Kreises von bekannter Stellung liegen muß, so muß derselbe, um zu gleicher Zeit allen drey Bedingungen zu genügen, einer der Punkte seyn, die sowohl der dritten Kugel, als dem Umfange des Kreises gemein sind; aber es ist bekannt, daß der Umfang eines Kreises und eine Kugel sich nur in zwey Punkten schneiden können; daher findet sich der Punkt, vermöge der drey Bedingungen, von allen im Raume unterschieden, und er kann nur noch einer der zwey bestimmten Punkte seyn; so daß, wenn außerdem noch angegeben wird, auf welcher Seite, in Bezug auf die Ebene, welche durch die drey Mittelpunkte geht, der Punkt liegt, derselbe absolut bestimmt ist, und mit keinem andern mehr verwechselt werden kann.

Man sieht wohl, daß wenn man, um die Stellung eines Punktes im Raume zu bestimmen, dessen Entfernungen von andern bekannten Punkten anwendet, Betrachtungen entstehen, die nicht einfach genug sind, um als Grundlage einer Verfahrungsart, zum täglichen Gebrauche, zu dienen.

4. Wir wollen nun untersuchen, in welche Betrachtungen man geführt würde, wenn man, anstatt die Stellung eines Punkts auf drey andere bekannte Punkte zu beziehen, denselben auf gerade Linie von bekannter Stellung bezöge.

Wir bemerken zuvor, daß eine gerade Linie niemals als begrenzt zu betrachten sey,

und daß dieselbe stets nach einer und der andern Seite unbestimmt verlängert werden könne.

Zur Vereinfachung, wollen wir die Geraden, welche wir anwenden werden müssen, nacheinander mit A, B, C, rc. bezeichnen.

Wenn aus der Definition der Stellung des Punktes hervorgeht, daß derselbe, zum Beyspiel einen Fuß von der ersten bekannten Geraden A entfernt ist, so drückt man damit aus, daß derselbe einer von denen einer Cylinderfläche von kreisförmiger Grundlinie sey, deren Axe die Gerade A, und deren Halbmesser ein Fuß ist, und welche, nach den beyden Richtungen ihrer Länge unbestimmt verlängert ist; denn alle Punkte dieser Fläche besitzen die in der Definition ausgedrückte Eigenthümlichkeit, und sind die Einzigen, welche dieselbe besitzen. Der Punkt ist dadurch von allen Punkten des Raumes unterschieden, welche außerhalb der Cylinderfläche liegen, er ist ebenfalls von allen jenen unterschieden, welche im Innern des Cylinders liegen, und er kann nur noch mit denen der Cylinderfläche selbst verwechselt werden, unter welchen man ihn nur mittelst neuer Bedingungen auszeichnen kann.

Nehmen wir daher weiter an, der gesuchte Punkt solle zwey Fuß von einer zweyten geraden Linie B entfernt seyn, so ist eben so ersichtlich, daß derselbe dadurch auf eine zweyte Cylinderfläche von kreisförmiger Grundlinie versetzt wird, deren Axe die gerade Linie B ist und deren Halbmesser zwey Fuß sind; aber mit deren sämmtlichen Punkten derselbe vermengt ist, wenn man nur die zweyte Bedingung für sich allein betrachtet. Vereinigt man die zwey Bedingungen, so muß der Punkt sich sowohl auf der ersten, als auf der zweyten Cylinderfläche befinden, und er kann nur einer der Punkte seyn, welche beyde Flächen gemein haben, das heißt, einer ihrer beyderseitigen Durchschnittslinie. Diese Linie, auf welche der Punkt sich befinden muß, theilt sowohl die Krümmung der ersten Cylinderfläche als die Krümmung der zweyten, und ist, im Allgemeinen, von dem Geschlechte derjenigen, welche man krumme Linien von doppelter Krümmung nennt.

Um den Punkt von allen Uebrigen dieser Linie zu unterscheiden, bedarf es einer dritten Bedingung.

Nehmen wir endlich an, die Definition drücke noch weiter aus, daß der fragliche Punkt drey Fuß von einer dritten geraden Linie C abliege.

Aus dieser neuen Bedingung ergiebt sich, daß der Punkt einer von denen, einer dritten Cylinderfläche von kreisförmiger Grundlinie sey, deren Axe die Gerade C ist, und welche drey Fuß Halbmesser hat: nimmt man daher alle drey Bedingungen zusammen, so kann der Punkt nur noch einer von denen seyn, welche sowohl der dritten Cylinderfläche,

als auch der, aus dem Durchschnitt der beyden Ersten entstandenen krummen Linie von doppelter Krümmung gemein sind; nun aber kann diese krumme Linie von der dritten Cylinderfläche im Allgemeinen in acht Punkten geschnitten werden. *) Daher bringen die drey vereinigten Bedingungen den gesuchten Punkt darauf zurück, daß er einer von den acht bestimmten Punkten ist, unter welchen man ihn nur mittelst einiger besonderer Bedingungen auszeichnen kann, die von der Art sind, wovon wir bey dem Falle der Punkte ein Beyspiel gegeben haben.

Man sieht wohl, daß die Betrachtungen, welche sich ergeben, um die Stellung eines Punktes im Raume, durch die Kenntniß seiner Entfernung von drey gegebenen Geraden, zu bestimmen, noch weit weniger einfach sind als die, zu welchem seine Entfernungen von drey Punkten veranlassen, und daß sie, auf diese Weise noch weniger zur Grundlage einer oft anzuwendenden Methode dienen könne.

5. Unter allen einfachen Gegenständen, welche die Geometrie betrachtet, sind hauptsächlich zu bemerken, 1tens der Punkt, welcher keine Dimension hat, 2tens die gerade Linie, die nur einen hat, 3tens die Ebene, die deren zwey hat. Untersuchen wir, ob es nicht einfacher sey, die Stellung eines Punkts durch die Kenntniß seiner Entfernung von bekannten Ebenen zu bestimmen, als hiezu seine Entfernungen von Punkten oder geraden Linien anzuwenden.

---

*) Um eine deutliche Vorstellung zu erhalten, wie dieses statt haben könnte, betrachten wir zuerst nur zwey der genannten Cylinderflächen, und nehmen wir an, die Eine habe einen merklich kleineren Durchmesser als die Andere, und sie durchdrängen sich dergestalt, daß die Axen sich begegnen, und unter sich einen Winkel bilden, der bedeutend kleiner als ein rechter sey. Es ist sodann einleuchtend, daß die Cylinderfläche von dem kleineren Durchmesser die Andere gänzlich durchschneide, so daß sie auf der vordern Seite dieses Letzteren und auf ihrer hinteren Seite zwey abgesonderte ähnliche und sehr länglichte Schnitte mache. Sofort nehmen wir an, die dritte Cylinderfläche habe einen Durchmesser, der ungefähr die Mitte zwischen den beyden andern hielte, sie durchdränge die Fläche vom größeren Durchmesser so, daß abermals die Axen sich begegneten aber unter einem vom rechten wenig abweichenden Winkel, und sie träfe die zwey in dieser Fläche gemachten Schnitte ungefähr in ihren Mitten. Es ist einleuchtend, daß die Schnitte, die sie auf den beyden Seiten des großen Cylinders hervorbringen werde, breiter seyn müssen. und nicht so lang, als die, durch den kleinen Cylinder gebildeten, und daß daher jeder von diesen neuen Schnitten die älteren in vier Punkten treffen werden. Sonach giebt es vier, den drey Cylindern gemeinschaftliche Punkte auf der äußeren Seite desjenigen, welche den größten Durchmesser hat, und noch einmal vier auf seiner hintern Seite, also achte.

In gewissen besondern Fällen kann diese Anzahl kleiner seyn, sie kann sich auf 6 auf 4 auf 2 und selbst auf null reduziren, je nach der Stellung und dem Durchmesser der Flächen. (Siehe IVtes Buch. IIItes Kap. Aufgab. IV.)

Nehmen wir in dieser Absicht an, es wären im Raume nicht parallele und, ihrer Stellung nach bekannte Ebenen vorhanden, welche wir nacheinander mit den Buchstaben A, B, C, D, rc. bezeichnen wollen.

Wenn der Punkt, nach der Erklärung seiner Stellung, einen Fuß zum Beyspiel, von der ersten Ebene A entfernt seyn soll, ohne daß ausgedrückt wäre, auf welcher Seite, in Bezug auf diese Ebene er liege; so ergiebt sich hieraus, daß er einer von den Punkten zweyer Ebenen sey, die, parallel zu der Ebene A, Eine diesseits, die Andere jenseits dieser Ebene gelegen sind und jede von ihnen in die Entfernung eines Fußes; denn alle Punkte dieser beyden parallelen Ebenen, leisten der ausgedrückten Bedingung Genüge und sind, von allen im Raum, die Einzigen, die dieses thun.

Um daher unter allen Punkten dieser zwey Ebenen, denjenigen auszuzeichnen, dessen Stellung man erklären will, muß man abermals zu weiteren Bedingungen seine Zuflucht nehmen.

Setzen wir also zweytens fest: der fragliche Punkt solle zwey Fuß weit von einer zweyten Ebene B gelegen seyn; so versetzt man denselben dadurch auf zwey, der Ebene B parallele Ebenen, beyde zwey Fuß von dieser Ebene entfernt, die Eine auf dieser Seite, die Andere auf der Andern. Es folgt daraus, daß, um beyden Bedingungen zu gleicher Zeit zu genügen, der Punkt in einer von den, zu der Ebene A parallelen Ebenen liegen muß, und in Einer der beyden, die der Ebene B parallel sind, und daß er folglich einer der Punkte des gemeinsamen Durchschnitts dieser vier Ebenen sey. Nun aber besteht der gemeinschaftliche Durchschnitt von vier, je zwey und zwey parallelen Ebenen, von bekannter Stellung, aus der Vereinigung von vier ebenfalls der Stellung nach bekannten geraden Linien. Daher ist der Punkt, in dem man beyde Bedingungen zu gleicher Zeit betrachtet, weder mit den übrigen allen im Raume, noch selbst mit jenen der vier Ebenen vermischt, sondern nur noch mit denen der vier geraden Linien. Soll endlich der Punkt noch in einer Entfernung von drey Fuß, von der dritten Ebene C liegen, so drückt man dadurch aus, daß er einer von denen zweyer anderer Ebenen seyn müsse, die, parallel zu der Ebene C und auf ihren beyden Seiten, in einer Entfernung von drey Fuß gelegen sind. Demnach muß er, vermöge der drey Bedingungen, sowohl in einer der zwey letzten Ebenen befindlich seyn, als auch in Einer von den vier geraden Linien, den Durchschnitten der vier ersten Ebenen; er kann daher nur einer der Punkte seyn, die sowohl Einer der zwey Ebenen, als Einer der vier Geraden gemeinschaftlich sind. Da nun aber jede der zwey Ebenen einen Punkt mit jeder der vier geraden Linien gemein hat, so giebt es acht Punkte im Raume, die gleichzeitig den drey Bedingungen genügen; daher kann der fragliche Punkt, vermöge der drey Bedingungen, kein Anderer

seyn als Einer von den acht Bestimmten, unter welchen man ihn nicht anders, als mittelst einiger besonderen Bedingungen auszeichnen kann.

Wenn man zum Beyspiel, bey der Angabe des Abstandes von der ersten Ebene A, zugleich ausdrückt, auf welche Seite, in Bezug auf diese Ebene, der Abstand genommen werden müsse, so bleiben, statt zwey, zu der Ebene A parallelen Ebenen, nur Eine zu betrachten, jene nemlich, welche, in Bezug auf dieselbe Ebene, auf der nemlichen Seite liegt, auf welcher die Entfernung gemessen werden soll. Wenn man eben so angiebt, auf welcher Seite, in Betreff der zweyten Ebene, die Entfernung genommen werden soll, so schließt man die Betrachtung Einer der zwey Ebenen aus, die zu der Zweyten parallel sind, und es giebt nicht mehr als eine Ebene, deren Punkte der zweyten Bedingung entsprächen. Vereinigt man diese Bedingungen, so kann der Punkt nicht mehr in den vier geraden Durchschnittslinien der vier, je zwey und zwey parallelen Ebenen liegen, sondern nur in dem Durchschnitte zweyer Ebenen; das heißt in einer, der Stellung nach bekannten geraden Linie. Giebt man endlich noch an, auf welcher Seite der Punkt gelegen seyn muß, in Bezug auf die dritte Ebene, so bleibt von den zwey, zu der dritten parallelen Ebenen, nur eine, deren sämmtliche Punkte die letzte Bedingung erfüllen; und um zu gleicher Zeit allen Bedingungen Genüge zu thun, muß der Punkt sich in dem Durchnitt dieser dritten Ebene mit der einzigen Geraden, der Durchschnittslinie der zwey Ersten befinden; Er kann daher mit keinem Andern im Raume mehr verwechselt werden, und er ist folglich durchaus bestimmt.

6. Es ist sonach einleuchtend, daß die Ebene, obwohl sie in Rücksicht ihrer Abmessungen, kein so einfacher Gegenstand ist, als die gerade Linie, die nur eine Abmessung hat, und als der Punkt, der gar keine hat, dennoch mehr Bequemlichkeit zur Bestimmung eines Punkts im Raume darbiethe als der Punkt und die gerade Linie. Dieses Verfahren gebraucht man auch gemeinlich bei Anwendung der Algebra auf die Geometrie, wo man, um die Stellung eines Punktes zu finden, gewöhnlich dessen Entfernungen von drey Ebenen von bekannter Stellung sucht.

Aber in der darstellenden Geometrie, welche schon seit viel längerer Zeit, von weit mehr Menschen in Anwendung gebracht wurde, und von Menschen, deren Zeit kostbar war, haben sich die Verfahrungsarten noch mehr vereinfacht, und, statt der Betrachtung von drey Ebenen ist man, mittelst der Projektionen dahin gelangt, unumgänglich nicht mehr als zwey nöthig zu haben.

Methode der Projektionen.

7. Man nennt **Projektion eines Punktes auf eine Ebene**, den Fuß der Geraden, welche von dem Punkte senkrecht auf die Ebene gefällt ist.

Dieses angenommen, wenn man zwey Ebenen hat, von bekannter Stellung im Raume, und wenn man auf jeder von diesen Ebenen die Projektion des Punktes giebt, dessen Stellung man erklären will, so ist dieser Punkt vollkommen bestimmt.

In der That, wenn man sich durch die Projektion auf der ersten Ebene, eine Senkrechte auf diese Ebene denkt, so ist einleuchtend, daß dieselbe durch den zu bestimmenden Punkt gehen werde; eben so, wenn man sich durch seine Projektion auf der zweyten Ebene, eine Senkrechte auf diese Ebene denkt, so muß diese gleichfalls durch jenen Punkt gehen. Dieser Punkt liegt demnach zu gleicher Zeit in zwey geraden Linien, von bekannter Stellung im Raume, er kann daher kein anderer seyn, als der einzige Punkt ihres Durchschnitts, und er ist sonach vollkommen bestimmt.

8. Wir nennen die Ebenen, auf welche man die Punkte des Raumes projektirt, Projektionsebenen, den Senkrechten, mittelst welcher jene Punkte auf die Ebenen projektirt werden, geben wir die Benennung projektirende Linien.

9. Taf. I. Fig. 1. Es sey A B C D E . . . eine auf beliebige Art im Raume gelegene Linie; wenn man aus jedem Punkte dieser Linie eine Senkrechte auf eine Ebene M N P Q fällt, so bilden die Fußpunkte *a, b, c, d, e, . . .*, der Senkrechten auf dieser Ebene, eine neue Linie *a b c d e*, welche man die Projektion der Linie A B C D E auf der Ebene M N P Q nennt.

10. Taf. I. Fig. 2. Ist die gegebene Linie eine Gerade A B, so liegen die Senkrechten, welche aus ihren sämmtlichen Punkten auf die Projektionsebene M N P Q gefällt sind, in der Ebene, welcher durch die A B senkrecht auf die Projektionsebene geführt ist, die Fußpunkte jener Senkrechten fallen daher in den gemeinschaftlichen Durchschnitt dieser beyden Ebenen, welcher wie bekannt eine gerade Linie bildet; **die Projektion einer Geraden ist folglich ebenfalls eine Gerade.**

Wenn man daher nur die Projektionen *a, b* von zwey Punkten A, B, einer Geraden A B (Fig. 2.) hat, so ist die durch diese Punkte gezogene Gerade *a b* die Projektion der Geraden A B.

Es folgt hieraus, daß, wenn die gegebene Gerade selbst senkrecht auf die Projektionsebene wäre, ihre Projektion sich auf einen einzigen Punkt reduzire, auf jenen nemlich, in welchem sie selbst die Projektionsebene trifft.

Die Ebene, welche von den projektirenden Geraden, sämmtlicher Punkte einer geraden Linie gebildet wird, werden wir die projektirende Ebene der Geraden nennen.

11. Taf. I. Fig. 3. **Sobald auf zwey nicht parallelen Ebenen L M N O, M N P Q die Projektionen *a b, a′ b′* einer nemlichen unbegrenzten Geraden A B gegeben sind, so ist diese Gerade bestimmt**; denn wenn man sich durch die Projektion

$a' b$ eine Ebene senkrecht auf die Projektionsebene L M N O denkt, so muß diese Ebene, deren Stellung bekannt ist, nothwendigerweise durch die Gerade A B gehen; eben so, wenn man sich durch die andere Projektion $a' b'$ eine senkrechte Ebene auf die L M P Q denkt, so muß diese Ebene, deren Stellung bekannt ist, durch die Gerade A B gehen; die Stellung dieser Geraden, welche sich zu gleicher Zeit in zwey bekannten Ebenen befindet, und folglich in ihrem gemeinschaftlichen Durchschnitte, ist daher ganz bestimmt.

12. Aus welcher Anzahl von Seiten ein Polygon zusammengesetzt seyn mag, welche Seiten übrigens in der nemlichen, oder in verschiedenen Ebenen enthalten seyn können, so ist durch zwey Projektionen dieses Polygons auf zwey nicht parallelen Ebenen, jede Seite desselben bestimmt, und folglich ist es auch das Polygon selbst nach Gestalt und Stellung im Raume.

Um von dieser Gestalt und Stellung aus den beyden Projektionen eine deutliche Vorstellung abzuleiten, betrachte man jede dieser Projektionen als die Basis eines geraden Prismas, das im Raume an dem projektirten Polygon beendigt ist, so wird dieses den gegenseitigen Durchschnitt jener zwey Prismen bilden, die ihrerseits selbst nach Form und Stellung gänzlich bekannt sind.

13. Irgend eine krumme Linie (Kurve) besteht aus einer Reihe von Punkten des Raumes, die nach einem gewissen Gesetze der Stetigkeit aufeinander folgen. Nun aber ist die Stellung eines jeden Punktes bestimmt, wenn man die Projektionen desselben auf zwey verschiedenen Ebenen kennt. (Art. 7.); es folgt hieraus unmittelbar, daß die **Form und Stellung einer jeden krummen Linie bestimmt ist, durch die Projektionen dieser Linie auf zwey nicht parallelen Ebenen.**

Betrachten wir (Fig. 1.) alle projektirenden Geraden A a, B b, C c, D d . . . ꝛc., die aus den sämmtlichen Punkten der krummen Linie A B C D auf die Ebene M N P Q gefällt sind; so bilden diese offenbar eine eigenthümliche krumme Fläche, welche durch die Krumme A B C D und durch ihre Projektion $a\ b\ c\ d$ auf der Ebene M N P Q geht. Man kann daher die Projektion einer krummen Linie ansehen, als den Durchschnitt der Projektionsebene mit einer Fläche, welche aus den projektirenden Geraden aller Punkte der vorgelegten Krummen gebildet wird, und die man aus diesem Grunde die projektirende Fläche jener Krummen nennt. *)

Hat man zwey verschiedene Projektionen einer krummen Linie, so sind mit diesen zugleich auch zwey projektirende Flächen der Krummen nach Gestalt und Stellung gegeben,

*) Wir werden im zweyten Buche (Art. 58.) sehen, daß diese projektirenden Flächen der krummen Linien, zu dem Geschlechte der Cylinder gehören.

auf denen beyden die projektirte Krumme zu gleicher Zeit gelegen ist, und deren gegenseitigen Durchschnitt sie folglich bildet.

Wenn zufolge des Gesetzes, welches die Punkte einer Linie unter sich verbindet, diese Punkte in einer Ebene liegen, so nennt man die Linie einer ebene Krumme, im andern Fall heißt sie eine krumme Linie von doppelter Krümmung.

14. Alle bisher aufgestellten Sätze, über die Projektionen des Punkts, der geraden und der krummen Linie, sind durchaus unabhängig von der Stellung der Projektionsebenen; und sie haben gleichwohl ihre Gültigkeit, welchen Winkel auch diese zwey Ebenen unter sich bilden mögen. Wäre jedoch der, von beyden Projektionsebenen gebildete Winkel sehr stumpf, so würden die Winkel, den die auf ihnen senkrechten Geraden und Ebenen bilden sehr spitz, und in der Ausübung könnten kleine Fehler sehr bedeutende Irrungen in der Stellung der Punkte und Linien herbey führen. Um diese Unrichtigkeiten zu vermeiden, fügt man es immer so, daß die beyden Projektionsebenen rechtwinklig unter sich sind, wenn man anders nicht, irgend einer größeren Bequemlichkeit wegen, sich zu einer Aenderung hierin bestimmen läßt. Da überdem der größte Theil der Künstler, welche die Projektionsmethode anwenden, sehr vertraut sind mit der Stellung einer Horizontalebene und mit der Richtung des Senkels, so haben sie die eine der beyden Projektionsebenen als horizontal angenommen und die andere als vertikal.

Wir werden der Kürze wegen, in Zukunft die horizontale Projektionsebene vorzugsweise die Horizontalebene nennen und die vertikale Projektionsebene, gleichfalls vorzugsweise die Vertikalebene.

15. Die Nothwendigkeit es so einzurichten, daß bey den Zeichnungen die beyden Projektionen auf einem und demselben Blatte seyen, und bey den Arbeiten im Großen, auf der nemlichen Grundfläche — z. B. wie bey dem Reißboden der Zimmerleute — hat die Künstler noch ferner veranlaßt anzunehmen, daß die Vertikalebene sich um ihren Durchschnitt mit der Horizontalebene, wie um ein Scharnier drehe, um sich auf die letztere niederzulegen, und mit ihr nur eine und dieselbe Ebene zu bilden, und in dieser Lage ihre Projektionen zu konstruiren.

Demnach ist die Vertikalprojektion eigentlich immer auf einer Horizontalebene verzeichnet, und man muß sie sich beständig, mittelst einer Viertels Umdrehung um den Durchschnitt der Vertikalebene mit der Horizontalebene, aufgerichtet und wieder an ihren Platz zurückgelegt denken.

Den Durchschnitt der beyden Projektionsebenen, welcher sehr deutlich auf den Zeichnungen angegeben seyn muß, nennen wir die Projektionsaxe.

Auf diese Art wird in der Figur 3 die Projektion $a' b'$ der Geraden A B nicht auf

einer wirklich vertikalen Ebene gemacht; man stellt sich vor, diese Ebene habe sich um die Gerade L M gedreht, um sich auf die Horizontalebene aufzulegen und in dieser Stellung der Ebene wird die Vertikalprojektion $a' b'$ ausgeführt.

16. Außer der Bequemlichkeit in der Ausführung, welche diese Anordnung darbietet, gewährt sie noch den Vortheil, die Arbeit der Projektionen abzukürzen, denn in der That, nehmen wir an, die Punkte a, a' (Fig. 3.) seyen die horizontale und vertikale Projektion des Punktes A, so ist die, durch die Geraden A a, A a' geführte Ebene zu gleicher Zeit senkrecht auf beyde Projektionsebenen, weil sie durch zwey Gerade geht, welche senkrecht auf dieselben sind; sie ist daher auch senkrecht auf die Projektionsaxe L M, dem gemeinschaftlichen Durchschnitt der Projektionsebenen; und die Geraden a C, a' C, nach welchen sie diese beyden Ebenen schneidet, sind selbst senkrecht auf L M.

Nun aber, wenn sich die Vertikalebene um die Projektionsaxe, als Scharnier dreht, so hört die Gerade a' C während dieser Bewegung nicht auf senkrecht auf L M zu seyn, und sie ist noch senkrecht auf dieselbe, wenn sie, nachdem die Vertikalebene niedergelegt ist, die Stellung C a'' genommen hat. Die zwey Geraden a C, a'' C, da sie beyde durch den Punkt C gehen, und beyde senkrecht auf L M sind, liegen daher, Eine in der Verlängerung der Andern: eben so verhält es sich mit den Geraden b D, b'' D in Bezug auf jeden andern Punkt wie B. Es folgt hieraus, daß, wenn man die Horizontalprojektion eines Punktes hat, die Projektion dieses Punkts auf der umliegend gedachten Vertikalebene, in der Geraden liegen muß, welche durch die Horizontalprojektion senkrecht auf die Projektionsaxe gezogen ist, und eben so umgekehrt. Für die Ausübung äußerst wichtiges Resultat.

17. Um nach diesen Annahmen ein Zeichnungsblatt als Projektionsebene anzuordnen, fange man damit an, die Mitten der beyden gegenüber stehenden schmalen Seiten des Blattes zu bezeichnen, und ziehe durch diese Mitten eine Gerade wie X Z, Taf. II (die Figuren der Tafel I. sind nicht nach der Projektionsmethode gezeichnet); auf die Gerade X Z errichte man mittelst des Zirkels und Lineals, ohne Beyhülfe des Winkelmaßes, die Senkrechte V W, so daß durch diese beyden Linien das Zeichnungsblatt in vier, ungefähr gleiche Theile getheilt werde.

Wenn mehrere Figuren auf ein Blatt kommen, so mache man für jede dasselbe Geviert, mehrere Figuren können eine Seite des Geviertes gemein haben und die andere parallel, wie aus der Tafel II ersichtlich ist. Die Seite L M des Geviertes der zweyten Figur nehme man als Projektionsaxe, und es sey A (Fig. 2.) die Horizontalprojektion irgend eines Punktes; wenn man durch diesen Punkt A auf die Projektionsaxe L M die Senkrechte A C a errichtet, so muß die Vertikalprojektion desselben Punkts irgend wo

in dieser Senkrechten liegen: es sey a diese Projektion. Obgleich die zwey Theile A C und a C der Geraden A C a nur eine einzige Gerade bilden, welche die Projektionsaxe in einem Punkte C schneidet, so muß man sich diese Theile als Seiten eines rechten Winkels denken, dessen Scheitel in C ist, und dessen eine Seite A C in der Horizontalebene liegt, und die andere in der Vertikalebene; und da diese Seiten A C, a C wechselseitig parallel zu den projektirenden Geraden des Punktes im Raume sind, so messen sie die Abstände dieses Punkts von der Vertikalebene und von der Horizontalebene.

18. Aus der rechtwinkligen Stellung der Projektionsebenen unter sich folgt ferner noch, daß alle, in einer von ihnen enthaltenen Punkte und Linien zugleich auch ihre eigenen Projektionen auf dieser Ebene seyen, und daß sie sich auf die Andere nach der Projektionsaxe, als dem gemeinsamen Durchschnitte dieser Ebenen projektiren.

Wir müssen hier bemerken, daß die Projektionsaxe nie als die Gränze der Projektionsebenen betrachtet werden darf, sie ist nur ihr wechselseitiger Durchschnitt. Diese beyden Ebenen, unbestimmt verlängert gedacht, theilen den ganzen Raum in vier gleiche Regionen, und in jede von diesen können die zu projektirenden Gegenstände sich erstrecken; obschon man gewöhnlich annimmt, daß sie vorzugsweise den Raum einnehmen, welcher zwischen dem oberen Theile der Vertikalebene und dem vorderen Theile der Horizontalebene gefaßt ist. Diesem zufolge entsprechen immer zwey Punkte, die auf einer und derselben Senkrechten auf die Projektionsaxe genommen sind, einem bestimmten Punkte des Raumes als dessen Projektionen; und eben so können stets je zwey beliebig auf den Projektionsebenen gezogene] Gerade A B, a b (Taf. II. Fig. 2.) als die Projektionen einer Geraden angenommen werden, deren Stellung im Raume durch sie bestimmt ist.

19. Bisher haben wir die gerade Linie als unbestimmt betrachtet und wir hatten uns deßhalb nur mit ihrer Richtung zu beschäftigen. Wenn aber eine Gerade als durch zwey Punkte begränzt angenommen werden muß, so kann noch außerdem verlangt werden, ihre Größe zu kennen. Wir werden sogleich sehen, wie diese aus der Kenntniß ihrer beyden Projektionen abzuleiten sey.

Wenn eine Gerade parallel ist zu einer der zwey Ebenen, auf welche sie projektirt wurde, so ist ihre Länge gleich ihrer Projektion auf dieser Ebene; denn die Gerade und ihre Projektion sind durch zwey Senkrechte auf die Projektionsebene begränzt, sie sind daher Parallele zwischen Parallelen und folglich von gleicher Größe. In diesem besondern Fall ist sonach mit der Projektion der Geraden auch zugleich ihre Länge gegeben.

Wenn aber eine Gerade parallel zu einer Projektionsebene seyn soll, so muß ihre Projektion auf der andern Ebene parallel zu der Projektionsaxe seyn.

Ist eine Gerade zu gleicher Zeit schief auf beyde Ebenen, so ist ihre Länge größer

als die einer jeden ihrer Projektionen; aber sie kann durch eine sehr einfache Konstruktion daraus abgeleitet werden.

Fig. 1. Taf. II. Es sey L M Projektionsaxe und A B, *a b* seyen die Horizontal- und Vertikalprojektion einer geraden Linie, welche durch zwey Punkte begränzt seyn soll, deren Projektionen A und *a*, B und *b* seyen: man verlangt die Länge des Stückes der Geraden zwischen diesen beyden Punkten?

Um diese Länge zu erhalten, betrachte man die Gerade als Hypothenuse eines rechtwinkligen Dreyecks, dessen eine Seite horizontal ist und gleich der Projektion A B, und dessen zweyte Seite vertikal ist und gleich *e b*, das heißt, gleich dem Unterschied der Höhen beyder Endpunkte der in Rede stehenden Geraden. Man konstruirt dieses Dreyeck indem man durch den Punkt *a* eine unbestimmte Parallele *a e* mit der Projektionsaxe zieht, welche die Gerade B *b* in einem Punkte *e* schneidet, und sodann von *e* nach *a′* eine Länge *e a′* gleich A B oder A′ B trägt. Durch die Vollendung des Dreyecks *a′ e b* erhält man die Hypothenuse *a′ b* desselben von einer Länge gleich der Gesuchten.

Da die beyden Projektionsebenen unter sich senkrecht sind, so hätte die so eben auf Einer von ihnen ausgeführte Operation auch auf der Andern gemacht werden können, und würde das gleiche Resultat geliefert haben. *)

20. Aus dem Vorhergehenden ist ersichtlich, daß, wenn man die zwey Projektionen eines Körpers hat, der durch ebene Flächen, geradlinige Kanten und die Scheitel körperlicher Winkel begränzt ist, lauter Projektionen die sich auf das System der geradlinigen Kanten reduziren, es leicht sey, hieraus die Länge jeder beliebigen Dimension, welche man wolle zu folgern; denn entweder ist diese Dimension parallel zu einer Projektionsebene, oder sie ist zu gleicher Zeit schief auf Beyde; im ersten Fall ist die gesuchte Länge der Dimension gleich ihrer Projektion, im zweyten kann man sie durch das eben beschriebene Verfahren aus ihren beyden Projektionen ableiten.

Von der Ebene.

21. Um eine Ebene mittelst der Projektionsmethode darzustellen, ist, wie leicht einzusehen, ein anderes Mittel erforderlich, als dasjenige, dessen wir uns zur Darstellung von Punkten und Linien bedient haben. Folgendes hat man im Gebrauche.

Die darzustellende Ebene, wenn sie anders nicht parallel zu einer von den Projek-

---

*) Für die Anfänger wird es sehr nützlich seyn, wenn sie nicht nur diese, sondern auch alle ähnlichen in der Folge dieses Buches vorgetragenen Konstruktionen, auf einer und der andern Projektionsebene ausführen.

tionsebenen ist, wird jede dieser beyden Ebenen nach einer geraden Linie durchschneiden; und diese zwey Durchschnittslinien werden sich selbst in einem Punkte kreuzen, welcher auf der Projektionsaxe liegt; denn da sie sich zu gleicher Zeit in der darzustellenden Ebene befinden, und jede von ihnen in einer Projektionsebene liegt, so können sie sich nur in dem Punkte schneiden, den diese drey Ebenen gemein haben, und dieser Punkt ist der Durchschnitt der gegebenen Ebene mit der Projektionsaxe.

Da man nun durch zwey sich schneidende oder parallele Gerade nur eine einzige Ebene führen kann, so folgt daraus, **daß die Stellung einer Ebene bestimmt ist, wenn man die Durchschnittslinien derselben mit den beyden Projektionsebenen kennt.**

Wir werden die Benennung *Risse einer Ebene* den Geraden geben, nach welchen dieselbe die Projektionsebenen durchschneidet und welche dazu dienen, um ihre Stellung anzugeben.

Taf. II. Fig. 4. Es sey die Gerade L M die Projektionsaxe; B sey ein Punkt dieser Axe, durch welchen man auf der Horizontalebene eine Gerade A B gezogen hat, und auf der Vertikalebene eine Gerade B C. Diese beyden Geraden, als die Risse einer Ebene angenommen, bestimmen die Stellung derselben vollkommen, der Punkt B ist der Durchschnitt dieser Ebene mit der Projektionsaxe.

Wenn eine Ebene parallel zu einer Projektionsebene seyn sollte, so würde sie nur einen Riß auf derjenigen Projektionsebene haben, zu welcher sie nicht parallel wäre, und in dem Falle würde dieser einzige Riß, welcher parallel zu der Projektionsaxe seyn müßte, hinreichen, um ihre Stellung anzugeben, weil er zugleich die unbestimmte Projektion der ganzen Ebene wäre.

Von den Projektionen der durch ebene Flächen begränzten Körper.

22. Ein Körper, welcher durch ebene Flächen begränzt wird, ist es auch durch geradlinige Kanten, als den wechselseitigen Durchschnitten dieser Flächen. Man stellt solche Körper dar, indem man die Projektionen einer jeden Kante angiebt; die Projektionen jedes Scheitels, welcher eine dieser Kanten begränzt, liegen in der nemlichen Senkrechten auf die Projektionsaxe. Es giebt indessen durchaus keine allgemeine Regel, wie diese Projektionen zu konstruiren seyen: man fühlt in der That wohl, daß je nachdem die Stellung der Kanten und Winkel eines Körpers gegeben ist, die Konstruktion ihrer Projektionen mehr oder minder leicht seyn könne, und daß die Art und Weise des Verfahrens, von jener der Angabe abhängen müsse.

Es ist hier gerade so wie mit der Algebra, in welcher es auch keine allgemeine

Regel giebt, wie eine Aufgabe in Gleichung anzusetzen sey. In jedem einzelnen Falle hängt der Gang davon ab, auf welche Art das gegenseitige Verhalten zwischen den gegebenen Größen und den Unbekannten ausgedrückt sey; und nur durch veränderte Beyspiele kann man die Anfänger gewöhnen, dieses Verhalten aufzufassen und in Gleichungen niederzuschreiben. Eben so in der darstellenden Geometrie; nur durch zahlreiche Beyspiele und durch den Gebrauch von Zirkel und Lineal kann man mit den Konstruktionen vertraut werden, und sich gewöhnen, in jedem einzelnen Falle die einfachste und zugleich zierlichste Methode zu wählen. Aber auch, eben so wie es in der Analysis, sobald eine Aufgabe in Gleichung angesetzt ist, Verfahrungsarten giebt, wie diese Gleichungen behandelt, und wie daraus die Werthe einer jeden unbekannten Größe abgeleitet werden können, eben so giebt es in der darstellenden Geometrie allgemeine Methoden, um sobald die Projektionen gemacht sind, alles das zu konstruiren, was aus der Gestalt und der gegenseitigen Stellung der Körper entspringt.

Nicht ohne Grund vergleichen wir hier die darstellende Geometrie mit der Algebra, denn diese zwey Wissenschaften stehen in der innigsten gegenseitigen Beziehung. Es giebt keine Konstruktion der darstellenden Geometrie, welche nicht in die Analysis übersetzt werden könnte, und jede analytische Operation kann, sobald nicht mehr als drey unbekannte Größen in der Aufgabe vorkommen, als die Urkunde eines geometrischen Schauspiels betrachtet werden.

Es wäre zu wünschen, daß diese beyden Wissenschaften gemeinsam kultivirt würden: die darstellende Geometrie brächte in die verwickeltsten analytischen Operationen die Evidenz, die sie charakterisirt; die Analysis würde dagegen der Geometrie die ihr eigenthümliche Allgemeinheit mittheilen.

23. Es wäre nun hier der Ort, die Darstellungsart der durch krumme Flächen begränzten Körper vorzutragen; wir haben es aber für zweckdienlicher gehalten, diesen Gegenstand erst im nächstfolgenden Buche abzuhandeln.

Von der Ausführung der Zeichnungen.

24. Eine Zeichnung der darstellenden Geometrie ist das Bild der Linien und Flächen, welche man kombinirt hat, um zur Lösung einer Aufgabe zu gelangen.

Unter den Linien, welche diese verschiedenen Größen vorstellen, unterscheiden wir zwey Gattungen: 1tens diejenigen, welche die Projektionen der gegebenen und der gesuchten Größen der Aufgabe vorstellen, und 2tens jene Linien, welche die gemachten graphischen Operationen angeben, um die gesuchten Projektionen zu erhalten. Um den Projektionszeichnungen den möglichsten Grad von Verständlichkeit zu geben, ist es durchaus

erforderlich, daß man die genannten Gattungen von Linien, durch eine besondere Art dieselben zu ziehen, unter einander auszeichne. Die folgenden Erörterungen werden uns auf geeignete Annahmen, in dieser Beziehung, leiten.

25. Die Projektionsaxe theilt jede Projektionsebene in zwey Theile, nemlich: die Vertikalebene in einen obern und einen untern; und die Horizontalebene in einen vordern und einen hintern Theil; und über jeden von diesen Theilen können die Projektionen einer geometrischen Größe sich erstrecken. Durch die Umdrehung der Vertikalebene um die Projektionsaxe fallen aber die beyden Ebenen in eine zusammen und es wäre nun, ohne besondere Merkmale nicht mehr möglich zu erkennen, welcher Projektion irgend eine Linie angehöre.

Stellen wir uns nun die Projektionsebenen als wirkliche, phisische Ebenen vor, zum Beyspiel als äußerst dünne und unbiegsame Tafeln, so würde, nach der Umdrehung der Vertikalebene, der obere Theil derselben auf den hinteren Theil der Horizontalebene fallen und diesen bedecken, der untere Theil der Vertikalebene würde hingegen unter den vorderen Theil der Horizontalebene zu liegen kommen, und von diesem bedeckt werden. Wir hätten sodann auf jeder Projektionsebene einen Theil der Projektionen, welcher gesehen, und einen Theil, welcher bedeckt wäre; und wir werden sogleich den Nutzen einer solchen, übrigens ganz natürlichen Vorstellungsart einsehen.

Wenn man sich nun so die projektirten Größen, als wirklich im Raume vorhanden denkt, und von der nemlichen Beschaffenheit, wie wir so eben die Projektionsebenen angenommen haben, so kann man, nach dieser Vorstellungsart, jede Projektion als eine Abbildung der projektirten Gegenstände betrachten, wobey man sich nemlich das Auge unendlich weit von der Projektionsebene entfernt denken muß, und zwar in einer Senkrechten auf diese Ebene, so daß die projektirenden Linien als in unendlicher Entfernung zusammenlaufende Gesichtsstrahlen angesehen werden können. Die vorgestellten Gegenstände können sodann, entweder durch die Projektionsebenen, indem sie diese durchschneiden, oder durch sich selbst, wechselsweise bedeckt werden und bestünden daher ebenfalls aus gesehenen und bedeckten Theilen.

Nehmen wir dieses an, so folgt daraus: erstens, daß jede Projektion ihren besonderen Gesichtspunkt habe, und daß folglich gewisse Theile der vorgestellten Gegenstände in einer Projektion gesehen seyn können, während sie auf der Andern bedeckt erscheinen. Zweytens, daß der Gesichtspunkt für die Horizontalprojektion im Unendlichen über der Horizontalebene sey, und daß die entsprechenden Gesichtsstrahlen, für diesen Punkt, vertikal sind. Drittens, daß der Gesichtspunkt der Vertikalprojektion im Unendlichen vor der

Vertikalebene sey, und daß die von diesem Punkte ausgehenden Gesichtsstrahlen horizontal sind und senkrecht auf die Vertikalebene.

Setzen wir sofort fest: 1tens die gegebenen Größen einer Aufgabe und die Gesuchten, überhaupt die Wichtigsten sollen als wirklich im Raume vorhanden betrachtet, und auf jeder Projektion sollen die gesehenen und die bedeckten Theile derselben unterschieden werden. 2tens diejenigen Größen, welche nicht zu den genannten gehören, sondern blos zur Konstruktion dienen, sollen als nicht wirklich vorhanden angenommen werden und an ihren Projektionen daher keine gesehenen oder nicht gesehenen Theile bemerkt werden.

26. Auf diese Annahmen haben wir folgende Regeln gegründet, welche in allen Zeichnungen beobachtet sind.

Erstens. Die Projektionen derjenigen Gegenstände, welche wirklich im Raume vorhanden angenommen sind, werden durch volle Linien (A B. Fig. 4. Taf. I.) angegeben.

Zweytens. Die Projektionen jener Theile der genannten Gegenstände, welche entweder durch eine Projektionsebene, oder durch andere Gegenstände der nemlichen Gattung bedeckt erscheinen, und welche folglich nicht gesehen werden können, außer wenn man diese letzteren durchsichtig annimmt, werden durch punktirte Linien bezeichnet. (A′ B′. Fig. 4. Taf. I.)

Drittens. Alle blos zur Konstruktion dienenden Gegenstände, werden mit gestrichelten Linien angegeben. (A″ B″. Fig. 4. Taf. I.)

Viertens. Solche Gegenstände, die zwar als zur Konstruktion dienend betrachtet sind, die aber irgend einer besondern Rücksicht wegen von den gewöhnlichen Konstruktionen ausgegezeichnet werden sollen, werden wir mit gemischten Linien (A‴ B‴ Fig. 4. Taf. I.) bezeichnen.

27. Wenn eine Projektionszeichnung blos die geometrische Darstellung eines Körpers zum Zweck hat, so pflegt man diesen Annahmen noch die folgende hinzuzufügen: Man stellt sich die projektirten Gegenstände durch Sonnenstrahlen beleuchtet vor, die unter einem Winkel von 45° geneigt, von der Linken gegen die Rechte einfallen, und man bezeichnet diejenigen Linien, welche die Konturen der im Schatten liegenden Seiten bilden, durch starke volle Striche und diejenigen Konturen, welche blos beleuchtete Seiten von einander trennen durch feinere volle Striche.

Diese Unterscheidung, welche die Deutlichkeit der Darstellung sehr erhöht, kommt aber den Zeichnungen der reinen Geometrie nicht zu, und wir haben sie deßhalb nirgends angewendet.

28. Als Beyspiel der Anwendung dieser Regeln, wollen wir einige Figuren examiniren, deren Gegenstand wir als bekannt annehmen dürfen.

Taf. II. Fig 1. L M stellt die Projektionsaxe vor, als eine wichtige Linie einer jeden Aufgabe haben wir sie hier, so wie in allen folgenden Blättern durch eine bemerkbare volle Linie angegeben. A B, *a b* die Projektionen einer Geraden sind ebenfalls voll ausgezogen, und ebenso die Gerade *a' b*. (Art. 19.) Die projektirenden Geraden A *a*, B *b*, so wie alle übrigen Linien der Figur sind, als Konstruktionslinien mit gestrichelten Linien bezeichnet.

Fig. 2. Die Projektionsaxe L M; die Horizontalprojektion A B, und die Vertikalprojektion *a b* einer Geraden sind voll ausgezogen. Das Stück B D der Geraden A B D, welches auf den hintern Theil der Horizontalebene fällt erscheint durch die Vertikalebene bedeckt und ist deßhalb punktirt. In der Vertikalprojektion ist *b* der Punkt, in welchem die projektirte Gerade die Vertikalebene durchschneidet, dieser Punkt *b* trennt daher das gesehene Stück der Geraden von dem bedeckten, die Projektion *b d* dieses letztern ist deßhalb punktirt. Alles übrige sind Konstruktionslinien.

Fig. 3. A B, *a b*; E F, *e f* sind die Projektionen zweyer Geraden: die Figur zeigt übrigens nicht weiter Bemerkenswerthes.

Fig. 4. A B. ist der Horizontalriß und C B der Vertikalriß einer Ebene. Das oberhalb der Projektionsaxe L M, gelegene Stück des Horizontalrisses A B fällt auf den hintern Theil der Horizontalebene, und das unterhalb der L M gelegene Stück des Vertikalrisses B C liegt auf dem untern Theil der Vertikalebene; beyde sind deßhalb punktirt. D E, E F sind die Risse einer zweyten, mit der ersten parallelen Ebene. Die Stellung dieser Risse zeigt deutlich, daß die zweyte Ebene in jeder Projektion durch die erste bedeckt erscheine; daher sind die Risse derselben durchaus punktirt.

Taf. III. Fig. 3. F G, G *c* sind die Risse einer Ebene, und A B, *a b* die Projektionen einer Geraden; diese Gerade schneidet die Ebene in einem Punkte, dessen Projektionen A, *a* sind; sie kann daher in beyden Projektionen nur bis zu diesem Punkte gesehen seyn, und deßhalb sind die Projektionen A B, *a b* dieses Stückes voll ausgezogen, die Projektionen A C, *a f* des nicht gesehenen Stückes dagegen punktirt.

29. Diese Beyspiele zeigen auf hinreichende Art, wie die (Art. 26.) aufgestellten Grundsätze in Rücksicht auf die Ebene und die gerade Linie anzuwenden seyen. Sobald man eine richtige Vorstellung hat von der Lage der Ebenen und Linien und von ihren gegenseitigen Durchschnitten, so kann die Bestimmung ihrer gesehenen und bedeckten Theile keine Schwierigkeit darbieten.

Nicht ganz so einfach ist diese Aufgabe in Bezug auf die krummen Flächen, und hier kann die Voraussetzung, daß eine Fläche wirklich im Raume existire, und die daraus fließende Nothwendigkeit ihre gesehenen und bedeckten Theile aufzusuchen, zu Erörterungen

veranlassen, die dem eigentlichen Gegenstande der Aufgabe zu fremd wären. Es bleibt in dem Falle der, durch Uebung in den Projektionszeichnungen zu erwerbenden Gewandheit des Arbeitenden überlassen, diese Schwierigkeiten zu umgehen, ohne der erforderlichen Deutlichkeit der Darstellung Eintrag zu thun. Wir werden (Art. 116. 117.) nochmals auf diesen Gegenstand zurückkommen und einige einfache Regeln über die Ausführung der Zeichnungen hinsichtlich der krummen Flächen geben.

Zweytes Kapitel.

Lösung verschiedener Aufgaben über die gerade Linie und die Ebene.

Erste Aufgabe.

Es ist eine Gerade gegeben, mittelst ihrer beyden Projektionen; man soll die Punkte konstruiren, in denen sie die Projektionsebenen durchschneidet?

30. Auflösung. Es sey A B D (Taf. II. Fig. 2.) die Horizontalprojektion, und *a b d* die Vertikalprojektion der gegebenen Geraden.

Der Punkt, in welchem diese Gerade die vertikale Projektionsebene durchschneidet, muß als Horizontalprojektion einen Punkt der Projektionsaxe L M haben; (Art. 18.) er muß aber auch horizontal irgendwo in der Geraden A B D projektirt seyn; der Punkt B, der einzige den die Geraden L M und A B D gemein haben, ist daher die Horizontalprojektion dieses Durchschnittspunktes. Da nun die beyden Projektionen eines Punkts im Raume in einer nemlichen Senkrechten auf die Projektionsaxe liegen, so muß die aus B auf L M errichtete Senkrechte B *b* den fraglichen Punkt enthalten; dieser Punkt muß aber außerdem auch in der Vertikalprojektion *a b d* enthalten seyn; daher ist der Begegnungspunkt *b* der zwey Geraden B *b* und *a b d* derjenige, in welchem die gegebene Gerade die Vertikalebene durchschneidet.

Um den Punkt D zu bestimmen, in welchem dieselbe Gerade die horizontale Projektionsebene durchschneidet, wendet man aus leicht einzusehendem Grunde die ganz ähnliche Konstruktion an: man verlängert die Vertikalprojektion *a b d* der gegebenen Geraden bis sie die L M in einem Punkt *d* trifft; die aus diesem Punkt errichtete Senkrechte *d* D auf L M schneidet die Horizontalprojektion A B D der gegebenen Geraden in dem gesuchten Punkt D.

Zweyte Aufgabe.

Es sind mittelst ihrer Projektionen ein Punkt und eine gerade Linie gegeben; man soll die Projektionen einer zweyten Geraden konstruiren, welche durch den gegebenen Punkt parallel zu der Ersten gezogen ist?

31. Auflösung. Die Horizontalprojektionen der gegebenen und der gesuchten Geraden müssen parallel unter sich seyn, denn sie sind die Durchschnitte der beyden parallelen projektirenden Ebenen mit der Horizontalebene: eben so verhält es sich mit den Vertikalprojektionen derselben Geraden. Da nun überdies die gesuchte Gerade durch den gegebenen Punkt gehen soll, so müssen ihre Projektionen auch wechselseitig durch die Projektionen dieses Punktes gehen.

Es seyen A B, *a b* (Taf. II. Fig. 3.) die Projektionen der gegebenen Geraden und D, *d* die des gegebenen Punkts; man ziehe durch den Punkt D die E F parallel zu A B und durch den Punkt *d*, die *e f* parallel zu *a b*, so sind die Geraden E F, *e f*, die verlangten Projektionen.

Dritte Aufgabe.

Es ist eine Ebene gegeben mittelst ihrer Risse, und die Projektionen eines Punkts; man soll die Risse einer zweyten Ebene konstruiren, welche durch den gegebenen Punkt parallel zu der Ersten geführt ist?

32. Auflösung. Es seyen A B, B C (Taf. II. Fig. 4.) die beyden gegebenen Risse und G, *g* die Projektionen des Punktes.

Die Risse der gesuchten Ebene müssen zu den entsprechenden Rissen der gegebenen Ebene parallel seyn, denn sie sind die Durchschnitte zweyer parallelen Ebenen, durch die nemliche Ebene. Man braucht also für jeden nur einen Punkt zu kennen, durch welchen er gehen muß. Zu diesem Zweck denke man sich durch den gegebenen Punkt eine horizontale Gerade, die in der gesuchten Ebene liege. Diese Gerade muß parallel zu dem zu suchenden Horizontalrisse derselben Ebene, und deßhalb auch parallel zu dem Riß A B seyn, und sie wird die Vertikalebene in einem Punkt treffen, welcher dem Vertikalriß der gesuchten Ebene angehört. Um diesen Punkt zu erhalten, ziehe man durch *g* die unbestimmte Horizontale *g* F und durch G die Gerade G I parallel zu A B; diese zwey Geraden sind die Projektionen der gedachten Parallelen zu dem Riß A B; diese trifft die Vertikalebene in einem Punkt F, welchen man nach der ersten Aufgabe (Art. 30.) konstruirt. Wenn man sofort durch den Punkt F eine Parallele E F zu B C zieht, so ist diese der Vertikalriß der gesuchten Ebene; nachdem man diesen Riß verlängert hat, bis er

die Projektionsaxe L M in einen Punkt E schneidet, und man zieht durch E die Parallele E D zu A B, so hat man den Riß derselben Ebene auf der Horizontalebene.

Anstatt in der gesuchten Ebene eine horizontale Gerade zu konstruiren, hätte man in derselben eine Parallele zu der Vertikalebene annehmen können, was nach einem durchaus ähnlichen Raisonnement folgende Konstruktion gegeben hätte: durch den Punkt G werde parallel zu L M die unbestimmte Gerade G D gezogen; durch den Punkt g die Gerade g H parallel zu C B, welche verlängert die L M in einem Punkt H schneidet, durch den man H D senkrecht auf L M errichtet. Diese letztere schneidet die G D in einem Punkt D; und wenn man durch diesen Punkt eine Parallele zu A B zieht; und durch E, wo diese Parallele die L M trifft, die E F, parallel zu B C, so hat man in D E, E F die verlangten Risse. Diese zweyte Konstruktion kann als Bewährung für die Richtigkeit der ersten dienen.

Vierte Aufgabe.

Es sind mittelst ihrer Projektionen drey Punkte im Raume gegeben; man soll die Risse einer Ebene konstruiren, welche durch diese drey Punkte geht?

33. Auflösung. Jede in der verlangten Ebene gezogene Gerade, durchschneidet die beyden Projektionsebenen in zwey Punkten, die den entsprechenden Rissen der Ebene angehören.

Es seyen A, und a (Taf. III. Fig. 1.) die Projektionen des ersten Punkts, B und b die des Zweyten, C und c die Projektionen des Dritten. Die drey Geraden, welche je zwey und zwey dieser Punkte verbinden, und welche ganz in der gesuchten Ebene liegen, haben zu Projektionen die Geraden A B, und $a\ b$, B C und $b\ c$, A C und $a\ c$. Die Punkte U, V, T, in denen diese Geraden die horizontale Projektionsebene treffen, (Art. 30) gehören daher dem Horizontalrisse U V T der verlangten Ebene an, und die Durchschnittspunkte p, q, r derselben Geraden mit der vertikalen Projektionsebene bestimmen den Vertikalriß $p\ q\ r$ eben dieser Ebene. Die beyden nach Erfoderniß verlängerten Risse U V T, $p\ q\ r$ müssen sich in einem nemlichen Punkte S der Projektionsaxe durchschneiden.

Fünfte Aufgabe.

Es sind zwey Ebenen gegeben, mittelst ihrer Risse auf beyden Projektionsebenen; man soll die Projektionen der Geraden bestimmen, nach welcher sie sich schneiden.

34. Auflösung. (Taf. III. Fig. 2.) Es seyen A B, $a\ b$ die Risse der ersten Ebene, C D, $c\ d$ die Risse der Zweyten. Der Punkt E, den die, nach Erfoderniß ver-

längerten Horizontalrisse der beyden Ebenen mit einander gemein haben, gehört offenbar beyden Ebenen zu gleicher Zeit an, und also ihrem gemeinschaftlichen Durchschnitte; eben so ist der Begegnungspunkt *f* der beyden Risse auf der Vertikalebene ein weiterer Punkt desselben Durchschnitts. Die gesuchte Durchschnittslinie der beyden Ebenen ist demnach so gelegen, daß sie die Horizontalebene in einem Punkt E trifft, und die Vertikalebene in einem Punkt *f*.

Wenn man daher den Punkt *f* auf die Horizontalebene nach F projektirt, indem man auf die Projektionsaxe L M die Senkrechte F *f* fällt, und alsdann die gerade F E zieht, so ist diese die Horizontalprojektion des Durchschnittes der zwey Ebenen; und wenn man auf gleiche Weise den Punkt E auf die L M nach *e* projektirt und hierauf die Gerade *e f* zieht, so ist diese die Vertikalprojektion des nemlichen Durchschnittes.

Sechste Aufgabe.

Es ist eine Gerade mittelst ihrer Projektionen, und eine Ebene mittelst ihrer Risse gegeben; man soll die Projektionen des Punktes konstruiren, in welchem die Gerade der Ebene begegnet?

35. Auflösung. Wenn man durch die gegebene Gerade irgend eine Ebene führt, und wenn man die Durchschnittslinie dieser Ebene und der Gegebenen konstruirt, so werden dieser gefundene Durchschnitt und die gegebene Gerade, da sie beyde in einer nemlichen Ebene liegen, sich schneiden, und ihr Durchschnitt, da er zu gleicher Zeit der gegebenen Geraden und der gegebenen Ebene angehört, ist der Begegnungspunkt dieser beyden.

Es seyen F G, G *c* (Taf. III. Fig 3.) die beyden Risse der gegebenen Ebene, und A B, *a b* seyen die Horizontal- und Vertikalprojektion der Geraden. Denken wir uns die Ebene durch die horizontal projektirende Ebene der Geraden durchschnitten; so wird ihr Durchschnitt horizontal in A B C projektirt seyn, und vertikal in *d c*, welche letzte Gerade man nach dem (Art. 34.) angegebenen Verfahren bestimme. Der gesuchte Begegnungspunkt muß nun in diesem Durchschnitte liegen und auch in der gegebenen Geraden; wenn aber zwey Gerade sich im Raume schneiden, so hat ihr Durchschnitt zu Projektionen die Durchschnittspunkte der Projektionen der Geraden, daher ist der Begegnungspunkt *a* der Projektionen *a b f* und *d c* die Vertikalprojektion des Begegnungspunkts der vorgelegten Geraden und Ebene.

Die Horizontalprojektion desselben Punkts, welche in der A B C enthalten seyn muß, ist daher in A, dem Begegnungspunkt dieser Geraden mit der aus dem Punkt *a* errichteten Senkrechten *a* A auf die Projektionsaxe L M.

Hätte man die vertikal projektirende Ebene der gegebenen Geraden zur Lösung der Aufgabe angewendet, so würde man nach den ganz ähnlichen Konstruktionen zuerst die Horizontalprojektion A des gesuchten Punktes erhalten haben, woraus man sodann die Vertikalprojektion *a* desselben abgeleitet hätte. Man kann sich dieser zweyten Konstruktion als Bewährungsmittel für die Genauigkeit der Ersten bedienen. Die folgende Auflösung ist allgemeiner.

36. (Taf. IV. Fig. 1.) Es sey N M die Projektionsaxe; L S, S *p* seyen die Risse der Ebene und A B, *a b* die Projektionen der Geraden. Diese Gerade schneidet die Projektionsebenen in die Punkten R, R′ (Erste Aufgb. Art. 30.) und deßhalb muß jede Ebene, welche durch dieselbe Gerade geführt ist, die Projektionsebenen nach zwey Geraden schneiden, welche durch diese nemlichen Punkte R und R′ gehen. Zieht man sonach durch den Punkt R eine Gerade R T L, welche die Gerade N M in einem Punkt T schneidet und durch die zwey Punkte T und R′ die Gerade R′ T *p*, so wird die Ebene, welche als Risse die Geraden L T, T *p* hat, die gegebene Ebene nach einer Geraden schneiden, welche sich nach L P und *l p* projektirt, (Art. 34.). Der Begegnungspunkt A der Geraden A B und L P, und der Begegnungspunkt *a* der Geraden *a b* und *l p*, sind die Projektionen des gesuchten Durchschnittpunkts. Die, die beyden Punkte A und *a* verbindende Gerade A *a* muß senkrecht seyn, auf die Projektionsaxe N M.

Siebente Aufgabe.

Aus einem gegebenen Punkt soll eine Senkrechte auf eine gegebene Ebene gefällt werden?

37. Auflösung. (Taf. IV. Fig. 2.) Es seyen A B, B C die Risse der Ebene; der gegebene Punkt sey in D und *d* projektirt. Um die Horizontalprojektion der gesuchten Geraden zu erhalten, fälle man aus D auf den Riß A B die Senkrechte D G, so ist diese die gesuchte Projektion; denn die horizontal projektirende Ebene der verlangten Geraden muß zu gleicher Zeit senkrecht auf die gegebene Ebene und auf die Horizontalebene seyn, sie muß daher auch senkrecht seyn auf den Durchschnitt dieser beyden Ebenen, das heißt auf den Horizontalriß A B der gegebenen Ebene, und folglich muß die Horizontalprojektion der gesuchten Geraden ebenfalls senkrecht seyn auf diesen Riß.

Die gleiche Schlußfolge giebt die Senkrechte *d g* auf B C als Vertikalprojektion der gesuchten Geraden.

38. Der Satz, den wir so eben bewiesen haben: Daß, wenn eine Gerade senkrecht auf eine Ebene ist, die Projektionen der Geraden senkrecht auf die Risse der

Ebene seyen, ist einer von denjenigen, welche die häufigste Anwendung in der darstellenden Geometrie finden.

Das Umgekehrte desselben ist ebenfalls wahr; nemlich: wenn die zwey Projektionen einer Geraden senkrecht auf die Risse einer Ebene sind so ist die Ebene selbst senkrecht auf die Gerade; denn wenn man sich durch jede Projektion der Geraden die projektirende Ebene derselben denkt, so hat man zwey Ebenen deren gemeinschaftlicher Durchschnitt die projektirte Gerade ist; nun aber ist jede dieser Ebenen senkrecht auf die, durch ihre Risse Gegebene, daher ist ihr gemeinsamer Durchschnitt, das heißt die projektirte Gerade, selbst senkrecht auf diese letzte Ebene.

39. Wenn aufgegeben wäre, durch eine gegebene Gerade eine Ebene senkrecht auf eine andere gegebene Ebene zu führen, so würde man aus irgend einem Punkt der gegebenen Geraden eine Senkrechte auf die gegebene Ebene fällen, und die, durch diese Senkrechte und durch die gegebene Gerade geführte Ebene (Art. 33.) wäre die Verlangte; denn zwey Ebenen sind senkrecht unter sich, wenn die Eine von Ihnen, durch eine Senkrechte auf die Andere geht.

Achte Aufgabe.

Durch einen bestimmten Punkt soll eine Gerade senkrecht auf eine gegebene Gerade gefällt, und der Begegnungspunkt der beyden Geraden konstruirt werden?

40. Auflösung. Wenn man durch den bekannten Punkt eine Ebene senkrecht auf die gegebene Gerade führt; sodann den Begegnungspunkt der Geraden mit dieser Ebene konstruirt, und diesen Punkt und den Gegebenen durch eine zweyte Gerade verbindet, so ist diese die verlangte Senkrechte; denn sie geht durch den bestimmten Punkt, und schneidet die genannte Gerade; überdem liegt sie in einer auf diese Gerade senkrechten Ebene und ist folglich senkrecht auf dieselbe.

Es seyen A B, *a b*, (Taf. IV. Fig. 3.) die Projektionen der gegebenen Geraden; D, *d* die des gegebenen Punktes. Die Risse der Ebene, welche durch diesen Punkt senkrecht auf die gegebene Gerade geführt ist, müssen wechselsweise senkrecht auf die Projektionen A B, *a b* seyn (Art. 38.). Ueberdem, wenn man in derselben Ebene, und durch den gegebenen Punkt eine Parallele zu einem ihrer Risse, zu ihrem Horizontalrisse zum Beyspiel annimmt, deren Projektionen die Senkrechte D H auf A B, und die Parallele *d h* zu L M sind, und wenn man nach Art. 30. den Punkt *h* konstruirt, wo diese Parallele die Vertikalebene durchschneidet, sodann durch *h* die Gerade *h* C senkrecht auf *a b* zieht, und durch den Begegnungspunkt dieser Geraden mit der L M die Gerade

C E senkrecht auf A B, so sind C E, C h die Risse jener senkrechten Ebene. Eine durch den gegebenen Punkt angenommene Parallele zu dem Vertikalrisse der senkrechten Ebene, deren Projektionen die, wechselsweise auf A B, $a\ b$ senkrechten Geraden D K, $d\ k$ sind, hätte zu dem nemlichen Resultate geführt. Die gegebene Gerade schneidet die letztgefundene Ebene in einem Punkte, als dessen Projektionen man nach Art. 35. die Punkte T und t findet; wenn man daher die Geraden D T, $d\ t$ zieht, so hat man die Projektionen der verlangten, auf die gegebene Gerade gefällten Senkrechten und die Projektionen des gesuchten Begegnungspunktes.

Neunte Aufgabe.

Es ist eine Ebene gegeben, und ein Punkt in derselben; man soll die Ebene auf eine der Projektionsebenen zurücklegen, und sodann die neue Stellung des Punktes bestimmen?

41. Auflösung. Taf. III. Fig. 1. *) Es seyen T S, S p die gegebenen Risse einer Ebene, welche Risse sich in einem Punkte S die Projektionsaxe schneiden. Was die Projektionen A, a eines Punktes der Ebene betrifft, so bemerken wir: wenn ein Punkt in einer Ebene enthalten seyn soll, so muß eine Parallele zu einem Risse der Ebene, welche durch diesen Punkt geführt wird, die Projektionsebene, auf welcher sich der zweyte Riß der Ebene befindet, in einem Punkte eben dieses Risses treffen. Um sich daher die Projektionen A, a eines in der Ebene T S, S p gelegenen Punktes zu geben, wendet man folgende Konstruktion an:

Durch die willkührlich angenommene Horizontalprojektion A, werde eine Parallele A F zu dem Risse T S geführt; aus dem Punkt F, in welchem diese Parallele die Projektionsaxe L M trifft, errichte man auf L M die Senkrechte F f, welche den Vertikalriß S p der gegebenen Ebene in einem Punkt f schneidet. Zieht man durch f eine unbestimmte Parallele $f\ a$ zu L M, und durch A eine Senkrechte A A′ a auf L M, so bestimmen diese beyden Geraden durch ihr Zusammentreffen in dem Punkt a, diesen als Vertikalprojektion des gegebenen Punkts.

Man hätte den Punkt a auch erhalten, wenn man durch A zu L M eine Parallele A K gezogen, und diese als die Horizontalprojektion einer Parallelen zu dem Risse S p betrachtet hätte. Diese Parallele schneidet die Horizontalebene in dem Punkt K, und man

*) Wir haben der Raumersparniß wegen die auf vorliegende Aufgabe sich beziehenden Konstruktionen noch auf die zur Aufgabe IV. Art. 33. gehörige Figur eingezeichnet; die Anfänger werden aber wohl thun, dieser Aufgabe eine besondere Zeichnung zu widmen.

erhält ihre Vertikalprojektion $a\ k$, wenn man K k senkrecht auf L M und $a\ k$ parallel zu S p zieht. Die Vertikale A A′ a begegnet der $a\ k$ in dem gesuchten Punkt a.

42. Es sey nun aufgegeben, die Ebene T S, S p, das heißt, die Ebene, deren Risse T S, S p sind, um ihren Riß S p auf der Vertikalebene zu drehen, um sie auf diese Ebene zurückzulegen.

Wenn eine Ebene sich um eine feste Gerade als Axe dreht, so beschreibt jeder Punkt der Ebene einen Kreis, dessen Ebene senkrecht auf die feste Gerade ist, und dessen Mittelpunkt in der nemlichen Geraden liegt.

Bey der Umdrehung der gegebenen Ebene um ihren Vertikalriß S p, bewegt sich folglich der in A, a projektirte Punkt in einer Ebene, welche senkrecht auf S p ist, und deren unbestimmte Vertikalprojektion man erhält, wenn man durch den Punkt a eine Gerade $a\ n\ a'$ senkrecht auf S p zieht; wenn daher die Ebene zurückgelegt ist, so wird der in Rede stehende Punkt irgendwo in einen Punkt dieser Geraden fallen. Es bleibt demnach nur noch der Halbmesser des durch denselben Punkt beschriebenen Kreises, das heißt, seine Entfernung von der Axe zu finden. Aber diese Entfernung ist die Hypothenuse eines rechtwinkligen Dreyecks, dessen Seiten $a\ n$ und A A′ sind. Errichtet man daher $a\ m$ senkrecht auf $a\ n$ und macht $a\ m$ = A A′ so ist die Hypothenuse $m\ n$ des Dreyecks $m\ a\ n$ gleich dieser Entfernung, und wenn man die Weite $m\ n$ von n nach a' trägt, so ist a' die Stellung des gegebenen Punkts, nachdem die Ebene, der er angehört, auf die Vertikalebene zurückgelegt ist.

Da der zurückgelegte Punkt immer in gleichem Abstande von jedem Punkte des Risses S p bleibt, so muß der Punkt a' auch an dem Endpunkt der Geraden $f\ a'$ = F A liegen; weil der Punkt f der Vertikalebene sich mit dem in A, a projektirten Punkt in einer nemlichen Horizontalen befindet, und daher A F gleich der wahren Entfernung dieser zwey Punkte ist. (Art. 19.)

Nehmen wir nun an, die gegebene Ebene drehe sich um ihren Riß T S auf der Horizontalebene, um sich auf diese aufzulegen, so wird der Punkt, dessen Projektionen A, a sind, einen Kreis beschreiben, dessen Ebene die Horizontalebene nach der Geraden A Z A″ senkrecht auf T S schneidet; man konstruirt den Punkt A″, in welchem der Umfang dieses Kreises durch die Horizontalebene geht, indem man aus K als Mittelpunkt, und mit einem Halbmesser K A″ = $k\ a$ einen Bogen beschreibt, welcher die Gerade A Z A″ in dem Punkt A″ schneidet; denn $a\ k$ ist die wahre Länge der in A K und $a\ k$ projektirten Geraden. A″ Z ist daher die Entfernung des gegebenen Punkts von dem Horizontalriß S T der gegebenen Ebene; diese Entfernung ist auch die Hypothenuse eines

rechtwinkligen Dreyecks a A′ Z′, dessen eine Seite a A′ ist, und die andere A′ Z′ = A Z, und man hat folglich $a\,z'$ = A″ Z.

43. Die beyden Risse T S, S p der gegebenen Ebene schließen einen Winkel T S X′ ein, welchen man konstruirt, indem man irgend einen Punkt x des Vertikalrisses S p um den Horizontalriß T S als Scharnier dreht. Dieser Punkt x auf die Horizontalebene zurückgelegt, fällt in der Senkrechten X X′ auf das Scharnier T S, in einem Abstande Z X′ von diesem Scharnier, gleich der Hypothenuse des rechtwinkligen Dreyecks x' X Z, in welchem die Seite x' X gleich der Geraden X x ist.

Es ist einleuchtend, daß man mittelst der vorstehenden Konstruktionen über die Ebene, einen Punkt und eine Gerade dieser Ebene, die wahre Gestalt, den Flächeninhalt und den Umfang einer jeden ebenen Figur bestimmen könne, deren zwey Projektionen gegeben sind.

Zehnte Aufgabe.

Es sind zwey Gerade gegeben, mittelst ihrer Projektionen; man soll den Winkel konstruiren, den ihre Richtungen bilden, wenn die gegebenen Geraden sich schneiden?

44. Taf. V. Fig. 1. Es seyen A B, $a\,b$; A C, $a\,c$ die gegebenen Projektionen der Geraden; wir bemerken dabey: daß, da die zwey Geraden als sich schneidend angenommen sind, die Projektionen A, a ihres Durchschnittspunkts in einer Senkrechten A a auf die Projektionsaxe L M liegen müssen.

Nachdem man die Punkte D und E konstruirt hat, in denen die gegebenen Geraden die Horizontalebene durchschneiden, und die Gerade D E gezogen, so bildet diese mit den zwey Theilen der gegebenen Geraden, die zwischen ihrem Durchschnittspunkt und den Punkten D und E gefaßt sind, ein Dreyeck, in welchem der, der Seite D E gegenüberstehende Winkel der gesuchte ist. Wenn man die Ebene dieses Dreyecks um die Gerade D E als Scharnier dreht, um sie auf die Horizontalebene niederzulegen, so beschreibt der Scheitel des gesuchten Winkels einen Kreis, welcher die Horizontalebene in einem Punkte H der Geraden A F H schneidet, die durch den Punkt A senkrecht auf D E gezogen ist. Um den Punkt H zu bestimmen, konstruire man das rechtwinklige Dreyeck a G F, dessen Seite f' G gleich A F′ oder gleich A F ist; man trage die Hypothenuse $a\,f'$ von F nach H, verbinde diesen Punkt mit D und E durch zwey Gerade, und man erhält das Dreyeck D H E, in welchem der Winkel H gleich dem Winkel ist, den die zwey gegebenen Geraden einschließen.

Wenn die gegebenen Geraden sich nicht schnitten, so würde man durch einen Punkt

der Einen, eine Parallele zu der Andern führen und, wie oben, den Winkel dieser zwey Geraden konstruiren, welcher sodann der gesuchte wäre.

Eilfte Aufgabe.

Es sind zwey Ebenen gegeben, man soll den Winkel konstruiren, den sie unter sich bilden?

45. Auflösung. Nachdem man die Durchschnittslinie der beyden Ebenen konstruirt hat, führe man eine dritte Ebene senkrecht auf diesen Durchschnitt. Diese Ebene schneidet die beyden Gegebenen nach zwey Geraden; der Winkel, den diese unter sich bilden, ist gleich dem Winkel der beyden Ebenen.

Es seyen A B, A b (Taf. V. Fig. 2.) die Risse der ersten Ebene; C D, C d die Risse der Zweyten, und folglich E F, $e\ f$ die Projektionen der Geraden, nach welcher sie sich schneiden. (Art. 34.) Nachdem man durch einen beliebigen Punkt I der Geraden E F eine Gerade G I H senkrecht auf dieselbe gezogen hat, betrachte man diese als den Horizontalriß, der zu konstruirenden dritten Ebene. Diese Ebene schneidet die Risse A B, B C in zwey Punkten G, H, und sie schneidet die Ebenen selbst nach zwey Geraden, welche mit der G H ein Dreyeck bilden, in welchem der, der horizontalen Seite G H gegenüberstehende Winkel der Gesuchte ist. Lassen wir die Ebene dieses Dreyecks sich um seine Grundlinie G H drehen, um sich auf die Horizontalebene zurückzulegen, so wird der Scheitel desselben sich in irgend einen Punkt der Geraden E F auflegen, weil diese Gerade E F zugleich die unbestimmte Projektion einer auf die Horizontale G H senkrechten Ebene ist. Es bleibt also nur noch die Höhe des Dreyecks, oder die Größe der Senkrechten, welche aus dem Punkt I auf den Durchschnitt der zwey Ebenen gefällt ist, zu finden.

Diese Senkrechte liegt aber in der, durch E F geführten Vertikalebene, und wenn man diese Ebene um die Vertikale F f dreht, um sie auf die vertikale Projektionsebene zurück zu legen, und hierauf F E von F nach E′ trägt, und F I von F nach i, so ist die Gerade E′ f die Größe desjenigen Stückes der Durchschnittslinie, welches zwischen den zwey Projektionsebenen gefaßt ist; fällt man nun aus dem Punkt i auf jene Gerade die Senkrechte $i\ k$, so ist dies die Höhe des verlangten Dreyecks. Wenn man daher endlich, $i\ k$ von I nach K trägt und das Dreyeck G K H vollendet, so ist der Winkel bey K gleich dem von den beyden Ebenen gebildeten Winkel.

46. Wenn der Winkel bestimmt werden sollte, den eine gegebene Ebene mit einer Projektionsebene macht, so wird in diesem besondern Fall die Anwendung der so eben vorgetragenen Methode weit einfacher.

Nehmen wir an, es solle der Winkel konstruirt werden, den die, durch ihre Risse A B, A b gegebene Ebene mit der vertikalen Projektionsebene macht. Durch einen Punkt P des Vertikalrisses A b errichte man eine Senkrechte P R auf diesen Riß, welche die Projektionsaxe in den Punkt R schneidet, und man betrachte sie als den Vertikalriß einer Ebene, welche senkrecht auf die vertikale Projektionsebene ist. Der Horizontalriß dieser Ebene wird daher die auf L M senkrechte Gerade R Q seyn. Diese Gerade schneidet den Horizontalriß A B in einen Punkt Q. Es folgt hieraus, daß die auf A b senkrechte Ebene die Gegebene nach einer Geraden schneide, welche mit den zwey Geraden P R, R Q ein in R rechtwinkliges Dreyeck einschließt, dessen Seite P R und R Q sind. Man konstruire mittelst dieser Seiten das Dreyeck P R q oder P′ R Q, und der Winkel bey P oder P′ ist der Gesuchte.

Auf gleiche Art würde man den Winkel der Horizontalebene und der gegebenen Ebene bestimmen.

Zwölfte Aufgabe.

Es ist eine Gerade und eine Ebene gegeben; man soll den Winkel konstruiren, unter welchem die Gerade auf die Ebene trifft?

47. Auflösung. Wenn man aus einem Punkt der gegebenen Geraden eine Senkrechte auf die Ebene fällt, so ist der Winkel, den die Senkrechte mit der Geraden bildet, das Complement des verlangten Winkels, und es ist zur Lösung der Aufgabe hinreichend diesen Winkel zu konstruiren.

Nun aber, wenn man auf jeder Projektion der Geraden einen Punkt nimmt, so daß diese beyden Punkte in einer nemlichen Senkrechten auf die Projektionsaxe liegen, und wenn man durch jeden derselben eine Senkrechte auf den entsprechenden Riß der Ebene fällt, so hat man beyde Projektionen der zweyten Geraden. Die Aufgabe ist also darauf zurück gebracht, den Winkel zu konstruiren, den zwey sich schneidende Geraden bilden: wir überlassen dem Leser die Konstruktion nach Art. 44.

48. Wenn man die Karte eines Landes aufzunehmen beabsichtigt, so nimmt man gewöhnlich die merkwürdigsten Punkte als durch gerade Linien unter sich verbunden an; diese Geraden bilden Dreyecke, und es handelt sich sodann darum, diese Dreyecke mittelst eines kleineren Maastabes auf die Karte überzutragen, und sie unter sich eben so zu ordnen, wie diejenigen, die sie vorstellen. Die auf dem Terrain vorzunehmenden Arbeiten bestehen hauptsächlich in der Messung der Winkel dieser Dreyecke; und damit diese Winkel unmittelbar auf die Karte übergetragen werden können, so muß jeder von ihnen in einer Horizontalebene liegen, welche parallel zu jener der Karte ist. Hat aber die Ebene des Win-

kels eine Neigung gegen den Horizont, so wird nicht mehr der Winkel selbst übergetragen, sondern seine Horizontalprojektion; und man kann diese Projektion immer finden, wenn man außer dem Winkel selbst auch noch die Winkel gemessen hat, die seine beyden Schenkel mit dem Horizonte bilden, was Veranlassung zu folgender Operation giebt, die unter dem Namen der Reduktion eines Winkels auf dem Horizont bekannt ist.

Dreyzehnte Aufgabe.

Es ist der Winkel zweyer Geraden gegeben, nebst den Winkeln, welche jede von ihnen mit der Horizontalebene bildet; man soll die Horizontalprojektion des Ersten konstruiren?

49. Auflösung. Es sey A, (Fig. 3. Taf. V.) die Horizontalprojektion des Scheitels des gegebenen Winkels, und A B die Horizontalprojektion eines seiner Schenkel, so daß demnach die Andere zu konstruiren bleibt. Man denke sich die vertikale Projektionsebene, durch A B gehend, und nachdem man durch den Punkt A eine unbestimmte Vertikale A a gezogen; nehme man auf derselben einen beliebigen Punkt d, den man als Vertikalprojektion des Scheitels des beobachteten Winkels betrachte. Ist dies geschehen, so ziehe man durch den Punkt d, die Gerade d B, welche mit der Horizontalen einen Winkel d B A einschließt, gleich jenem, welchen der erste Schenkel mit dem Horizonte bildet, und man findet B als den Begegnungspunkt dieses Schenkels mit der Horizontalebene. Wenn man ebenso, durch den Punkt d die Gerade d C zieht, welche die Horizontale unter einem Winkel d C A trifft, gleich dem Winkel, den die zweyte Gerade mit dem Horizonte macht, und wenn man aus A als Mittelpunkt, und mit einem Halbmesser A C einen unbestimmten Kreisbogen C E F beschreibt, so kann die zweyte Gerade die Horizontalebene nur in einen Punkt dieses Boges C E F treffen. Es handelt sich daher nur noch die Entfernung dieses Punkts von irgend einem Andern, wie B zu finden.

Nun aber liegt diese letzte Entfernung in der Ebene des beobachteten Winkels; zieht man daher die Gerade d D so, daß der Winkel D d B gleich ist dem Beobachteten, und trägt d C von d nach D, so ist die Gerade D B gleich dieser Entfernung.

Wenn man daher aus B, als Mittelpunkt, und mit einem Halbmesser gleich B D einen Kreisbogen beschreibt, so ist der Punkt E, wo dieser den ersten Bögen C E F schneidet, der Begegnungspunkt des zweyten Schenkels mit der Horizontalebene; die Gerade A E ist daher die Horizontalprojektion dieses Schenkels, und der Winkel B A E ist die Horizontalprojektion des beobachteten Winkels.

Vierzehnte Aufgabe.

Es sind zwey Gerade im Raume gegeben; man soll diejenige Gerade konstruiren, welche auf beyden senkrecht ist, und welche ihre kürzeste Entfernung mißt?

50. Auflösung. Nachdem man durch einen beliebigen Punkt der ersten Geraden eine Parallele zu der Zweyten, und durch diese Beyden eine Ebene geführt hat, welche sonach parallel zu der zweyten Geraden ist, projektire man die zweyte Gerade auf diese Ebene. Diese Projektion der zweyten Geraden wird die erste Gerade in einen Punkt schneiden, durch welchen man eine Senkrechte auf die, zu der Zweyten parallele Ebene errichte. Diese Senkrechte ist die Gesuchte und auf ihr wird die kürzeste Entfernung der gegebenen Geraden gemessen; denn sie geht durch einen Punkt der ersten Geraden und ist senkrecht auf eine Ebene, in welcher diese Gerade liegt; sie ist ferner in der projektirenden Ebene der zweyten Geraden auf die Ebene, in welcher die Erste liegt, enthalten; sie schneidet daher die zweyte Gerade und ist senkrecht auf sie, weil sie senkrecht auf eine Ebene ist, welche eine Parallele zu dieser zweyten Geraden enthält.

Es seyen A B, $a\ b$ (Taf. VI. Fig. 1.) die Projektionen der ersten Geraden; C D, $c\ d$ die Projektionen der Zweyten.

Die erste Gerade trifft die Vertikalebene in einem Punkt b, dessen Horizontalprojektion B ist; wenn man durch b, eine Parallele $b\ e$ zu $d\ c$ zieht, und durch B eine Parallele B E zu D C, so hat man die Projektionen der Parallelen zu der zweyten Geraden; diese Parallele trifft die Horizontalebene in dem Punkt E, die erste Gerade trifft dieselbe Ebene in A; die Gerade A E, welche diese Punkte verbindet, ist daher der Horizonralriß der Ebene, welche durch die erste Gerade parallel zu der Zweyten geführt ist. Der Vertikalriß derselben Ebene ist F b; der Punkt F liegt auf der Projektionsaxe L M und in der Verlängerung der Geraden A E. Wir wollen diese Ebene mit L bezeichnen. Die zweyte Gerade schneidet die Horizontalebene in einem Punkt C, welcher sich in c auf die Vertikalebene projektirt. Die Projektion dieses Punkts auf der Ebene L liegt in der Senkrechten auf die Ebene L, deren Projektionen C G, c K wechselsweise senkrecht auf die Risse A F, F b der Ebene L sind. Nun aber schneidet die durch C G H geführte Vertikalebene, die Ebene L nach einer Geraden deren Vertikalprojektion $g\ h$ ist, und folglich ist der Punkt i, der Durchschnitt der Geraden $g\ h$, c K, die Vertikalprojektion der Projektion des Punkts C auf der Ebene L, und der Punkt I ist die Horizontalprojektion desselben. Da nun die zweyte gegebene Gerade, welcher der Punkt C angehört, parallel zu der Ebene L ist, so projektirt sie sich auf diese Ebene nach einer Geraden, welche parallel zu ihr selbst ist; diese Gerade hat daher zu Projektionen die Geraden I N, $i\ n$,

welche wechselsweise parallel zu C D und $c\ d$ sind, und sie begegnet der ersten Geraden in einem Punkt, der sich nach N und n projektirt.

Dieser Punkt, der Durchschnitt der ersten Geraden und der Ebene, welche die zweyte Gerade auf die Ebene L projektirt, gehört der gesuchten Senkrechten auf die zwey gegebenen Geraden an.

Nun aber ist diese Senkrechte auf die zwey Geraden auch senkrecht auf die Ebene L; sie hat daher zu Projektionen die senkrechten Geraden P Q N, $p\ n$ R, auf die Risse A F, F b der Ebene L. Das zwischen den zwey gegebenen Geraden gefaßte Stück dieser Senkrechten hat zu Projektionen die Geraden P N, $p\ n$; man konstruire dessen Länge, und man hat alsdann die kürzeste Entfernung der zwey gegebenen Geraden nach Größe und Richtung.

Wenn man blos die absolute Größe dieser Entfernung verlangte, so würde die Konstruktion weit einfacher. In der That, nachdem man die Risse A E F, F b der Ebene L, welche durch die erste Gerade, parallel zu der Zweyten geführt ist, bestimmt hat, hätte man durch den Punkt C, in welchen die zweyte Gerade die Horizontalebene trifft, eine Vertikalebene C G senkrecht auf den Riß A F der Ebene L führen können. Diese Vertikalebene würde die Ebene L nach einer Geraden schneiden, deren Länge die Hypothenuse eines rechtwinkligen Dreyecks G H h' wäre, dessen Seite H h' gleich der Vertikalen H h ist. Fällt man nun aus dem Punkt C die Senkrechte C I′ auf diese Hypothenuse G h', so wäre C I′ die Länge der kürzesten Entfernung der zwey Geraden.

51. Die folgende Konstruktion, kann der Vorstehenden als Bewährungsmittel dienen: man ziehe die Senkrechte I′ I auf G C H, und die Senkrechte I i auf die Projektionsaxe L M. Diese Senkrechte I i schneidet die Gerade $h\ g$ in dem Punkt i, wodurch die zwey Projektionen des Punkts I, i bestimmt werden. Durch I und i ziehe man I N und $i\ n$ parallel zu C D und $c\ d$, und man hat die Projektionen der Parallelen zu der zweyten gegebenen Geraden; diese Parallele begegnet der ersten Geraden in einem Punkt, dessen Projektionen N und n sind, und welcher die Projektionen N P, $n\ p$ der Senkrechten auf die zwey gegebenen Geraden bestimmt. *)

*) Wir werden im zweyten Buche (Art. 95) noch eine Auflösung der vorstehenden Aufgabe vortragen, welche auf die Betrachtung der tangirenden Ebene zu einer Cylinderfläche gegründet ist.

Die vierzehn vorstehenden Beyspiele, ob sie gleich nicht alle Hülfsmittel der Projektionsmethode zeigen können, umfassen doch alle Grundsätze, auf denen die Lösung der Aufgaben über die Ebene und gerade Linie beruht; so daß jeder sich ergebende Fall nur die Wiederholung von einer oder mehreren der angeführten Konstruktionen erfodert.

Es ist unerläßlich, daß die Anfänger, um sich mit diesen Konstruktionen vollkommen vertraut zu machen, dieselben noch an manigfachen Beyspielen üben, weßhalb wir einige hieher setzen, wobey es ihrer Geschicklichkeit überlassen ist, durch eine passende Wahl der Projektionsebenen, die einfachsten und expeditivsten Mittel anzuwenden.

1) Man soll die Horizontal = und Vertikalprojektion eines regulären Dodekaeders konstruiren, und den Schnitt dieses Körpers, durch eine ihrer Stellung nach gegebene Ebene?

2) Es sind im Raume zwey Gerade gegeben, die sich nicht begegnen, man soll die Stellung einer dritten Geraden bestimmen, welche parallel zu einer gegebenen Richtung ist, und zu gleicher Zeit die beyden Ersten schneidet?

3) Auf einer Ebene ist die Projektion eines bekannten Winkels gegeben, nebst der Stellung eines Schenkels desselben in Bezug auf die nemliche Ebene; man soll die Stellung des zweyten Schenkels finden?

4) Es ist eine Gerade, und eine mit ihr nicht parallele Ebene gegeben, man soll durch die Gerade eine zweyte Ebene führen, welche mit der Gegebenen einen bestimmten Winkel bildet.

5) Man soll durch einen gegebenen Punkt des Raumes eine Gerade führen, welche jede der beyden Projektionsebenen unter bestimmten Winkeln schneidet.

6) Durch einen gegebenen Punkt des Raumes, soll eine Ebene gelegt werden, welche mit beyden Projektionsebenen bestimmte Winkel einschließt.

Zweytes Buch.

Krumme Flächen.

Erstes Kapitel.

Von der Erzeugung der Flächen.

52. Die Annahmen, welche die Grundlage der Projektionsmethode bilden, eignen sich vollkommen zur Darstellung eines Punkts im Raume, so wie einer jeden geraden oder krummen Linie; sie sind ferner ganz passend, um die Stellung und Gestalt eines Körpers auszudrücken, dessen Gränzen ebene Flächen, geradlinige Kanten und die Scheitel körperlicher Winkel sind; weil in diesem Falle der Körper vollkommen bestimmt ist, sobald man die Stellung aller seiner Kanten und der Scheitel aller seiner Winkel kennt. Aber, wenn der Körper durch eine einzige krumme Fläche begränzt wäre, deren sämmtliche Punkte einem nemlichen Gesetze unterlägen, wie bey der Kugel; oder durch stückweise Zusammenfügung verschiedener krummer Flächentheile, wie bey gedrehten Körpern, so wären diese Annahmen nicht nur unbequem, unpraktisch, und hätten den Fehler kein Bild zu geben, sondern sie ermangelten noch überdies der Fruchtbarkeit, und sie wären unzureichend.

Vorerst ist leicht zu ersehen, daß die Annahmen, welche wir aufgestellt haben, für sich allein bestehend, unbequem und auch unpraktisch wären; denn man müßte, um die Stellung aller Punkte einer krummen Fläche auszudrücken, nicht allein die Vertikal- und Horizontalprojektion eines Jeden angeben, sondern die beyden Projektionen desselben Punkts müßten auch untereinander verbunden werden, damit man nicht Gefahr liefe, die Horizontalprojektion irgend eines Punkts mit der Vertikalprojektion eines Andern zusammen zu nehmen, und da, wie wir gesehen haben, die einfachste Verbindung solcher zwey Punkte, durch eine auf die Projektionsaxe senkrechte Gerade geschieht, so würde man die Zeich-

tungen mit einer außerordentlichen Anzahl von Linien überladen, die eine um so größere Verwirrung darauf hervorbrächten, je genauer man seyn wollte. Wir werden sogleich zeigen, daß diese Methode auch unzureichend wäre, und daß ihr die nöthige Fruchtbarkeit fehlte.

Unter der unendlichen Anzahl verschiedener krummer Flächen, giebt es Einige, die sich nicht über einen endlichen und umgränzten Theil des Raumes hinaus erstrecken, und deren Projektionen einen, nach allen Richtungen beschränkten Umfang haben. Die Kugelfläche ist zum Beyspiel in diesem Fall: die Ausdehnung ihrer Projektion auf einer Ebene beschränkt sich auf die eines Kreises, von demselben Halbmesser wie die Kugel, und es läßt sich annehmen, daß die Ebene, auf welcher die Projektion derselben gemacht werden soll, hiezu hinreichend groß sey. Aber alle Cylinderflächen sind nach der Richtung der Geraden, die sich auf ihnen ziehen lassen, unbestimmt; selbst die Ebene, die einfachste aller Flächen ist nach zwey Richtungen unbestimmt; endlich giebt es eine große Zahl krummer Flächen, die sich zu gleicher Zeit nach allen Regionen des Raums ausbreiten. Nun aber haben die Ebenen, auf welchen man die Projektionen ausführt, nothwendig eine begränzte Ausdehnung; besäße man daher kein anderes Mittel, um die Natur einer krummen Fläche kennen zu lernen, als die zwey Projektionen eines jeden Punkts, durch welchen sie geht, so wäre dasselbe nur auf diejenigen Punkte der Fläche anwendbar, die der Ausdehnung der Projektionsebenen entsprächen, alle jene, welche darüber hinaus lägen, könnten weder ausgedrückt, noch erkannt werden; und sonach wäre die Methode unzureichend. Sie ermangelte endlich der Fruchtbarkeit, weil man Nichts daraus ableiten könnte, was Bezug hat auf die tangirenden Ebenen der Flächen, auf ihre Normalen, auf ihre Wendungslinien, auf ihre Rückkehrkanten, auf ihre vielfachen Punkte, auf ihre vielfachen Linien, auf alle jene Eigenschaften endlich, welche nothwendig betrachtet werden müssen, sobald man auf einer krummen Fläche arbeiten will.

Es bedurfte daher noch einer ferneren Annahme, welche vereinbar mit der Ersten, dieselbe überall ergänzte, wo sie nicht zureichte. Auf diese weitere Annahme sollen uns die folgenden Betrachtungen leiten.

53. Gleich wie eine Linie eine Reihe von Punkten des Raumes ist, die nach einem gewissen Gesetze der Stetigkeit unter sich verbunden sind, eben so ist eine Fläche, das Ganze aller Punkte des Raumes, welche eine besondere Eigenthümlichkeit gemein haben. Wenn aber ein Punkt sich im Raume nach irgend einem Gesetze bewegt, so ist der geometrische Ort seiner Bewegung eine Linie. Lassen wir eine Linie, sich nach irgend einem Gesetze im Raume bewegen, wobey sie entweder, indem sie ihre Stellung verändert, ihre Gestalt unveränderlich beybehalten, oder zu gleicher Zeit Stellung und Gestalt ver-

ändern kann, ohne jedoch ihre Natur zu wechseln; so ist der geometrische Ort ihrer Bewegung, oder was dasselbe ist, das Ganze aller auf einanderfolgenden Stellungen, welche die bewegliche Linie nacheinander einnahm, eine Fläche.

Man kann dem zufolge eine krumme Fläche betrachten, als sey sie durch die Bewegung einer Linie von beständiger oder veränderlicher Gestalt entstanden: und die Fläche wird bestimmt seyn, sobald man folgende drey Stücke kennt: 1tens die Gestalt der beweglichen Linie, 2tens das Gesetz ihrer Bewegung und 3tens das Gesetz ihrer Gestaltveränderung.

54. Diese Betrachtungsweise der krummen Flächen: als den Ort irgend einer beweglichen Linie, deren beständige oder veränderliche Gestalt in jedem Augenblick der Bewegung gegeben ist, hat man in der darstellenden Geometrie angenommen; sie bildet die Ergänzung der Projektionsmethode; und wir werden häufige Gelegenheit haben uns von ihrer Einfachheit und von ihrer Fruchtbarkeit zu überzeugen.

55. Wir werden der beweglichen Linie, durch deren Orts- und Gestaltveränderung eine krumme Fläche entsteht, den Namen der Erzeugungslinie dieser Fläche geben.

Gewöhnlich ist das Bewegungsgesetz einer Erzeugungslinie dadurch gegeben, daß diese Linie eine bestimmte Stellung in Bezug auf andere bekannte Linien haben soll; diese Letzteren werden wir die Leitlinien der Fläche nennen.

56. Also nicht durch die Angabe der Projektionen einzelner Punkte, durch welche eine krumme Fläche geht, wird die Gestalt und Stellung derselben bestimmt, sondern dadurch, daß man die Mittel angiebt, um für jeden beliebigen Punkt einer Fläche die Erzeugungslinie konstruiren zu können, in der Stellung und Gestalt, die sie haben muß, indem sie durch diesen Punkt geht, und wir stellen daher den Grundsatz auf: eine krumme Fläche ist bestimmt, wenn man für jeden Punkt derselben, dessen eine Projektion beliebig angenommen seyn kann, die Projektionen der Erzeugungslinie zu konstruiren weiß, welche durch diesen Punkt geht.

57. Man kann es als eine Folge dieser Annahme betrachten, daß wir die Ebene, die einfachste aller Flächen, nicht durch die Angabe von drey ihrer Punkte bestimmt haben, welche hinreichend wären, um ihre Stellung festzusetzen; sondern durch Angabe ihrer Risse, von denen man jeden als die Erzeugungslinie der Ebene betrachten kann, welche sich so bewegt, daß alle ihre Punkte Parallelen zu dem zweyten Risse beschreiben.

In den folgenden Nummern werden wir die Erzeugungen einiger besonderer Gattungen von krummen Flächen durchgehen, und dadurch dasjenige noch deutlich machen, was diese Allgemeinheiten allenfalls dunkel gelassen haben könnten.

Von einigen krummen Flächen insbesondere.

Von den Cylinderflächen.

58. Die Cylinder werden hauptsächlich auf folgende zwey Arten erzeugt. Erstlich durch die Bewegung einer geraden Linie, welche, indem sie beständig parallel zu einer gegebenen Richtung bleibt, sich bey ihrer Bewegung auf eine gegebene krumme Linie stützt; oder zweytens, durch die Bewegung der Krummen, welche im ersten Fall als leitende Linie diente, und welche sich so bewegt, daß, während sie sich immer mit dem nemlichen Punkte an eine gegebene Gerade anlehnt, alle ihre übrigen Punkte Parallelen zu dieser Geraden beschreiben.

Die erste Erzeugungsart der Cylinder durch die gerade Linie ist die, unter welcher man diese Flächen am gewöhnlichsten betrachtet. In beyden Arten bleibt übrigens die Erzeugungslinie beständig von Gestalt, sie verändert blos ihre Stellung im Raume.

Es ist aus dem Gesagten ersichtlich, daß es so viele Arten von Cylindern gäbe, als sich verschiedene Leitlinien nehmen lassen, um die Bewegung der geraden Erzeugungslinie zu leiten; und daß man mit einer nemlichen Leitlinie wiederum unendlich verschiedene Varietäten von Cylindern bilden könne, je nach der verschiedenen Neigung, welche man der geraden Erzeugungslinie giebt.

Eine für die darstellende Geometrie sehr wichtige Klasse von Cylindern sind die projektirenden Flächen der krummen Linien (Art. 13). Dies sind Cylinder, welche als Leitlinien die Projektionen der Krummen haben, und deren Erzeugungslinien senkrecht auf die Projektionsebenen sind.

Wenn die Leitlinie eines Cylinders eine ebene Kurve ist, so heißt sie gewöhnlich die Basis oder Grundlinie desselben. Je nachdem diese Basis ein Kreis, eine Ellipse, eine Parabel u. s. w. ist, erhält die Fläche die Benennung: kreisförmiger, elliptischer oder parabolischer Cylinder ꝛc. Ferner sind die Cylinder gerade oder schief, je nachdem die gerade Erzeugungslinie senkrecht oder schief auf die Ebene der Grundlinie ist.

Jede einzelne Stellung der geraden Erzeugungslinie nennt man in den mechanischen Künsten eine Kante des Cylinders.

Man kann die Cylinder als Prismen von unendlich schmalen Seiten betrachten, oder vielmehr als die Gränze aller Prismen, deren Grundlinien um die der Cylinder umschriebene oder eingeschriebene Polygone sind.

Von den Kegelflächen.

59. Die Kegelflächen haben so wie die Cylinder ebenfalls zwey Haupterzeugungsarten. Man kann sie einmal betrachten als durch eine unbestimmte Gerade hervorgebracht, welche immer durch einen gegebenen festen Punkt geht und sich dabey auf eine gegebene Kurve als Leitlinie stützt. Der einzige Punkt, durch den die Gerade immer geht, ist der Mittelpunkt der Fläche, sehr ungeeignet hat man ihm den Namen des Scheitels gegeben.

Man kann die Kegelflächen auch auf eine zweyte Art erzeugen, welche wir hier zu mehrerer Einfachheit, nur auf diejenigen von kreisförmigen Leitlinien anwenden wollen. Diese Flächen können betrachtet werden, als von einem Kreise durchlaufen, welcher sich so bewegt, daß, während sein Mittelpunkt immer in der nach dem Mittelpunkt der Fläche gerichteten Geraden bleibt, sein Halbmesser in jedem Augenblick der Bewegung proportional sey, zu der Entfernung seines Mittelpunkts von jenem der Fläche.

Es ist einleuchtend, daß, so wie die Ebene des Kreises sich gegen den Mittelpunkt der Fläche bewegt, der Halbmesser desselben abnehme, und Null werde, wenn die Ebene durch den Mittelpunkt geht, und daß dieser Halbmesser seine Richtung ändere, um sofort unbestimmt zu wachsen, so wie die Ebene, nachdem sie den Mittelpunkt passirt hat, sich mehr und mehr von demselben entfernt.

Bey dieser zweyten Erzeugungsart ändert der Kreis, welcher Erzeugungslinie ist, nicht nur die Stellung, er ändert auch die Gestalt, weil er den Halbmesser ändert, und folglich Krümmung und Ausdehnung.

60. Der Mittelpunkt vereinigt zwey durchaus gleiche Theile eines Kegels, welche zusammen aber nur eine und dieselbe Fläche konstituiren. Wir nennen jeden dieser Theile ein Netz der Fläche. Es ist dieses ein allgemeiner Grundsatz, daß man als zu einer und derselben Fläche gehörig alle jene Theile zu betrachten hat, welche durch eine nemliche Bewegung, oder durch eine nemliche Linie in ihrer ganzen Ausdehnung erzeugt werden können, und wir nennen im Allgemeinen jeden solchen Theil ein Netz dieser Fläche. Die Eintheilung einer Fläche in Netze ist ganz analog mit der Eintheilung der Kurven in Zweige oder Schenkel.

61. Die Familie der Cylinderflächen kann als in jener der Kegelflächen mitbegriffen betrachtet werden; um dieses einzusehen, denken wir uns die Leitlinie eines Kegels in einer unveränderlichen Stellung, und nehmen wir an, daß der Mittelpunkt der Fläche, nach welchem alle geraden Erzeugungslinien zusammenlaufen, in eine unendliche Entfernung von dieser Leitlinie übergehe, so werden alle geraden Erzeugungslinien eine parallele Stellung unter sich nehmen, und die Fläche wird sich in einen Cylinder verwandeln.

Wegen dieser Analogie der beyden Flächenfamilien wendet man auch auf beyde die gleiche Benennungsweise an; so nimmt man die ebene Leitlinie den Namen der Basis oder der Grundlinie, und jede einzelne Stellung der geraden Erzeugungslinie die einer Kante der Kegelfläche an ꝛc.

Die einfachste aller Kegelflächen ist der gerade kreisförmige Kegel, er hat als Grundlinie einen Kreis, und der Mittelpunkt der Fläche liegt in der Axe dieses Kreises, welche zugleich der Axe des Kegels ist.

Der schiefe kreisförmige Kegel hat als Grundlinie einen Kreis, aber die aus dem Mittelpunkt der Grundlinie nach jenem der Fläche gezogene Geraden ist nicht senkrecht auf die Ebene dieser Grundlinie.

Man kann die Kegelflächen als die Gränzen der Pyramiden betrachten, deren gemeinschaftlicher Scheitel im Mittelpunkt der Fläche liegt, und deren Grundlinien um die des Kegels umschriebene oder eingeschriebene Polygone sind. (Man sehe in Bezug auf die Kegel- und die Cylinderflächen die Note 1 zu Ende dieses Buches).

Von den Umdrehungsflächen.

62. Wenn man irgend eine gerade oder krumme Linie, von einfacher oder doppelter Krümmung, sich dergestalt um eine feste Gerade als Axe drehen läßt, daß jeder Punkt der beweglichen Linie immer in gleichem Abstande von jedem Punkte der Axe bleibt, so erzeugt man durch die Bewegung dieser Linie eine Umdrehungsfläche.

Jeder Punkt der Erzeugungslinie einer Umdrehungsfläche beschreibt bey ihrer Drehung den Umfang eines Kreises, die Ebenen aller dieser Kreise sind senkrecht auf die Axe und ihre Mittelpunkte liegen in dieser Axe. Wenn man durch irgend einen Punkt der Erzeugungslinie und durch die Axe eine Ebene annimmt, so lassen sich alle diese Eigenschaften, nach dem was wir (Art. 42 u. 43.) über die Bewegung einer Ebene und eines Punkts in derselben gesagt haben, leicht erklären.

Die Umdrehungsflächen können auch betrachtet werden, als durch einen Kreis erzeugt, welcher sich so bewegt, daß, während sein Mittelpunkt immer in der Axe bleibt, und seine Ebene immer senkrecht auf diese Axe, sein Halbmesser in jedem Moment der Bewegung gleich sey der Entfernung des Punkts, in welchem die Ebene des Kreises die Axe durchschneidet, von demjenigen, in welchem sie eine im Raume gegebene Kurve trifft. Hiebey ändert die Erzeugungslinie, deren Gestalt bey der ersten Erzeugung beständig blieb, zu gleicher Zeit Stellung und Gestalt.

63. Wenn man aus allen Punkten einer doppelt gekrümmten Erzeugungslinie einer Umdrehungsfläche Senkrechte auf die Axe gefällt denkt, und an derselben beendigt, so

sind diese die Halbmesser der von jenen Punkten beschriebenen Kreise, und ihre Fußpunkte auf der Axe sind die Mittelpunkte dieser Kreise. Nun aber werden diese Halbmesser weder ihre Abstände von einander, noch ihre Größe ändern, wenn man sie sämmtlich auf eine durch die Axe geführte Ebene zurücklegt; ihre Endpunkte, die immer noch der Fläche angehören, werden eine besondere ebene Kurve bilden, und diese ebene Kurve wird daher durch ihre Umdrehung um die Axe dieselbe Fläche erzeugen, wie die vorgelegte Erzeugungslinie von doppelter Krümmung. Es läßt sich eben so leicht beweisen, daß nicht nur die genannte ebene Kurve, sondern, im Allgemeinen, jede auf einer Umdrehungsfläche verzeichnete Linie durch ihre Rotationsbewegung um die Axe wiederum die nemliche Fläche erzeugen müssen.

Man nennt eine durch die Axe einer Umdrehungsfläche gehende Ebene eine Meridianebene, und die krumme Linie, nach welcher eine solche Ebene die Fläche schneidet, einen Meridian derselben.

Die Kreise, aus denen man eine Umdrehungsfläche zusammengesetzt betrachten kann, und deren Ebenen senkrecht auf die Axe und parallel unter sich sind, heißen die Parallelkreise oder auch blos die Parallelen der Fläche.

64. Die Klasse der Umdrehungsflächen ist eine der zahlreichsten, welche in den Künsten angewendet werden und ihre Verfertigung ist eine der einfachsten. Es giebt so viele Familien derselben, als sich verschiedenerley Linien, oder auch selbst Zusammensetzungen von Linien zu ihrer Erzeugung nehmen lassen, und diese Familien zerfallen wiederum in sehr unterschiedene Arten, je nach der Stellung der Axe in Bezug auf die Erzeugungslinie.

Die geraden Kegel und Cylinder von kreisförmigen Grundlinien sind Umdrehungsflächen, deren Meridian aus zwey geraden Linien gebildet wird.

Die Kugel entsteht durch die Umdrehung eines Kreises um einen seiner Durchmesser. Wenn die Axe, um welche ein Kreis sich dreht, nicht durch den Mittelpunkt desselben geht, so bildet man eine Fläche, welche zu der Familie der ringförmigen gehört. Die Ringe, die in den mechanischen Künsten so häufig vorkommen, sind eine besondere Art dieser Flächenfamilie.

---

65. Wir wollen diese Aufzählung besonderer krummer Flächen für den Augenblick nicht weiter fortsetzen; die angeführten Beyspiele werden die Richtigkeit unseres oben aufgestellten Satzes deutlich gezeigt haben: „Daß es keine krumme Fläche gäbe, deren Gestalt „und Stellung nicht vollkommen durch die genaue und vollständige Angabe ihrer „Erzeugung bestimmt werden könnte.“ Es ist hiebey nur noch folgendes zu bemerken. 1tens da es leicht ist, für jede krumme Fläche mannigfache Erzeugungsarten anzu-

geben, so bleibt es der Geschicklichkeit und dem Scharfsinn des Arbeitenden überlassen, in jedem einzelnen Falle diejenige zu wählen, welche die einfachste Kurve gebraucht, und die am wenigsten mühsamen Betrachtungen erheischt. 2tens hat eine vielfache Erfahrung gezeigt, daß, anstatt bey jeder krummen Fläche nur eine einzige Erzeugungsart zu betrachten, was das Studium des Gesetzes der Bewegung und der Gestaltveränderung der Erzeugungslinie erfoderte; es oft weit einfacher sey, zu gleicher Zeit zwey verschiedene Erzeugungsarten zu betrachten, und für jeden beliebigen Punkt die Konstruktion zweyer Erzeugungslinien anzugeben.

66. Um an einem Beyspiel zu zeigen, mit welcher Einfachheit und Fruchtbarkeit die vorgetragene Betrachtungsweise der krummen Flächen sich zu allen graphischen Operationen mit denselben anwenden lasse; nehmen wir an, es sey eine krumme Fläche gegeben, und es solle der Durchschnitt dieser Fläche mit einer gleichfalls gegebenen Ebene konstruirt werden. Wenn die Erzeugungslinie der vorgelegten Fläche in irgend einer ihrer Stellungen die gegebene Ebene durchschneidet, was in einem oder in mehreren Punkten geschehen kann, so gehören diese Punkte, da sie zu gleicher Zeit auf der Fläche sowohl, als auf der durchschneidenden Ebene liegen, offenbar dem Durchschnitte dieser beyden an. Hat man daher eine hinreichende Anzahl von Stellungen der Erzeugungslinie konstruirt, und die Begegnungspunkte einer jeden mit der durchschneidenden Ebene bestimmt, und man verbindet die Vertikalprojektionen dieser Begegnungspunkte durch eine erste krumme Linie, sodann die Horizontalprojektionen derselben Punkte durch eine zweyte Krumme, so hat man die beyden Projektionen der gesuchten Durchschnittslinie, und zwar um so genauer, je mehr Begegnungspunkte der durchschneidenden Ebene mit den verschiedenen Erzeugungslinien man bestimmt haben wird.

Die Konstruktionen der ebenen Schnitte der krummen Flächen und der Durchschnitte dieser Flächen unter sich, sind der Gegenstand des 3ten Buches. In den weiteren Kapiteln des gegenwärtigen Buches werden wir uns mit der Konstruktion der tangirenden Ebenen und der Normalen zu den krummen Flächen beschäftigen.

Zweytes Kapitel.

Von den Tangenten, den tangirenden Ebenen und den Normalen zu den krummen Linien und Flächen.

67. Nach der gemeinhin in der Geometrie angenommenene Erklärung ist eine krumme Linie diejenige, deren Richtung sich stetig verändert. Denken wir uns an irgend

einem Punkt einer krummen Linie eine Gerade dergestalt gezogen, daß sie mit dem unendlich kleinen Element der Krummen, welches die Richtung derselben an dem genommenen Punkt bestimmt, zusammenfällt, so ist diese Gerade eine Tangente oder Berührungslinie zu der Krummen. Der Punkt, durch welchen die Tangente geführt wurde, heißt der Berührungspunkt.

Man erklärt auch eine Tangente als eine Gerade, welche dergestalt an eine krumme Linie gezogen ist, daß man zwischen ihr und der Krummen keine andere Gerade mehr ziehen kann. Diese Erklärung schließt aber offenbar die oben gegebene ein; denn nur deßwegen, weil die Tangente mit der Krummen am Berührungspunkt ein Element gemein hat, läßt sich durch denselben Punkt keine andere Gerade mehr zwischen jenen beyden Linien ziehen.

68. Wenden wir unsere Definition, um ein Beyspiel zu geben, auf einen bekannten Fall an. Die Kreislinie wird erzeugt durch den Endpunkt einer Geraden, die sich in einer Ebene, um einen auf ihr genommenen unveränderlichen Punkt dreht. Da die Neigung der beweglichen Geraden und der erzeugten Linie offenbar in allen Punkten der letzten unveränderlich bleibt, und diese Neigung überdies die gleiche ist, ob die Gerade sich nach der einen oder der andern Seite bewege, so folgt daraus, daß die Richtung der Kreislinie in jedem Punkte senkrecht auf den, diesem Punkte entsprechenden Halbmesser sey, und daß daher die Tangente an einem Punkt einer Kreislinie ebenfalls senkrecht auf den Halbmesser dieses Punkts seyn müsse; wie in den Elementen der Geometrie bewiesen wird.

69. Man nennt Normale die Gerade, welche durch einen Punkt einer ebenen krummen Linie senkrecht auf die Tangente an demselben Punkt gezogen ist. Die krummen Linien von doppelter Krümmung können keine bestimmten Normalen haben; die Ebenen, welche durch einen ihrer Punkte senkrecht auf die Tangente an demselben geführt sind, heißen Normalebenen der krummen Linien von doppelter Krümmung.

Tangirende Ebenen.

70. Denken wir uns an irgend einem Punkt einer krummen Fläche zwey verschiedene Erzeugungslinien in der Stellung, die sie haben müssen, wenn sie durch diesen Punkt gehen: wenn man an demselben Punkt zu jeder von diesen Erzeugungslinien die Tangente konstruirt, und durch diese zwey Tangenten eine Ebene führt, so ist diese eine tangirende Ebene zu der Fläche. Der Punkt der Fläche, in welchem die zwey Erzeugungslinien sich schneiden, und welcher zugleich auch den beyden Tangenten und der tangirenden Ebene gemeinschaftlich ist, heißt der Berührungspunkt der Fläche und der

Ebene. Diese Erklärung schließt die Bedingung ein, daß die tangirende Ebene am Berührungspunkt die Tangenten zu allen Linien enthalte, welche durch jenen Punkt auf der Fläche gezogen werden können.

71. Wie bey den Linien, so heißt auch bey den Flächen die Gerade, welche durch den Berührungspunkt senkrecht auf die tangirende Ebene geführt ist, Normale zu der Fläche. Sie ist senkrecht auf das Element der Fläche, weil die Richtung dieses Elements nach allen Seiten mit jener der tangirenden Ebene zusammenfällt, welche als die Verlängerung desselben betrachtet werden kann.

72. Die Betrachtung der tangirenden Ebenen und der Normalen zu den krummen Flächen ist für einen großen Theil der Künste sehr nützlich, und mehreren von ihnen ist sie durchaus unerläßlich. Wir wollen von jedem dieser Fälle nur ein einziges Beyspiel anführen, und diese aus der Baukunst und der Mahlerey entlehnen.

Die verschiedenen Theile, aus denen die, von behauenen Steinen erbauten Gewölbe zusammengesetzt sind, heißen Gewölbsteine, und man nennt Fugen, diejenigen Seitenflächen, mit welchen zwey aneinanderstoßende Gewölbsteine sich berühren; sey es nun, daß diese Gewölbsteine einer nemlichen Schichte angehören, oder daß sie in zwey aufeinanderfolgenden Schichten enthalten sind.

Die Stellung der Fugen bey den Gewölben unterliegt mehreren nothwendig zu erfüllenden Bedingungen; wir wollen hier nur diejenigen herausheben, die sich auf unsern Gegenstand beziehen. Eine dieser Bedingungen ist, daß die Fugen senkrecht unter sich seyen, und daß sie sämmtlich senkrecht auf die Oberfläche des Gewölbes stoßen. Wenn man sich merklich von diesem Gesetze entfernte, so würde man nicht nur die allgemeine Konvenienz verletzen, ohne welche Nichts wohlgefällig erscheint, sondern man würde auch Gefahr laufen, das Gewölbe weniger fest und weniger dauerhaft zu machen; denn wenn eine dieser Fugen schief auf die Oberfläche des Gewölbes wäre, so hätte der Eine von den zwey, an diese Fuge anstoßenden Gewölbsteinen einen stumpfen, und der Andere einen spitzen Winkel, und bey der Reaktion, welche die beyden Gewölbsteine gegen einander ausüben, wären diese zwey Winkel nicht des gleichen Widerstandes fähig; der spitzige Winkel würde wegen der Zerbrechlichkeit der Materialien dem Zerspringen ausgesetzt seyn, wodurch die Gestalt des Gewölbes geändert, und die Dauer des Gebäudes gefährdet wäre. Die Zerlegung eines Gewölbes in Gewölbsteine erheischt sonach unumgänglich die Betrachtung der tangirenden Ebenen und der Normalen zu der krummen Oberfläche des Gewölbes.

73. Gehen wir nun zu einem andern Beyspiele über, das aus einer Gattung genommen ist, die auf den ersten Anblick keiner so großen Strenge fähig scheint.

Man ist gewohnt, die Mahlerey als aus zwey verschiedenartigen Theilen zusammengesetzt zu betrachten. Der Eine ist die Kunst im eigentlichen Sinne, und hat zum Zweck, in dem Beschauer eine bestimmte Rührung zu erregen, ihm ein Gefühl mitzutheilen, oder ihn in die Stimmung zu versetzen, die ihn für gewisse Eindrücke am meisten empfänglich macht. Diese eigentliche Kunst setzt in dem Künstler einen philosophisch geübten Geist voraus, sie erfodert von seiner Seite die genauesten Kenntnisse von der Natur der Dinge, von der Art ihrer Wirkung auf uns, und selbst von den unwillkührlichen Zeichen, in welchen diese Wirkung sich kund thut. Sie kann nur das Ergebniß einer sehr ausgezeichneten Erziehung seyn, wie sie nicht leicht jemand erhält, und wie wir sie unsern angehenden Künstlern überall nicht geben. Sie hängt nicht von allgemeinen Regeln ab, und verträgt blos guten Rath.

Der andere Theil der Mahlerey ist, so zu sagen ihr Handwerk, die Aufgabe desselben ist die genaue Ausführung des Erfundenen. Hier ist nichts willkührlich, alles kann durch strenges Raisonnement vorher berechnet werden, weil hier alles das nothwendige Resultat angenommener Gegenstände und gegebener Verhältnisse ist. Wenn ein Gegenstand nach Gestalt und Stellung bekannt ist, wenn man die Natur, die Anzahl und die Stellung aller Körper kennt, die ihn beleuchten können, sey es durch gerades Licht, oder durch Reflexionsstrahlen, wenn die Stellung des Auges des Beschauers fest ist, wenn endlich alle Umstände, welche auf das Sehen Einfluß haben können, recht geordnet und bekannt sind, so ist der Ton eines jeden Punkts der sichtbaren Oberfläche des Körpers absolut bestimmt. Alles was Bezug hat, auf die Farbe dieses Tons und auf ihren Glanz, hängt ab, von der Stellung der tangirenden Ebene an diesem Punkt, in Rücksicht auf die beleuchtenden Körper und das Auge des Beschauers, es kann durch bloßes Raisonnement gefunden werden; und ist es gefunden, so muß man sich genau daran halten. Jede Schwächung, jede Uebertreibung würde Form und Farbe der Erscheinung alteriren und eine andere Wirkung hervorbringen, als der Künstler erwartete.

Ich weiß wohl, daß die oft nöthige Schnelligkeit der Ausführung nur selten die Anwendung einer Methode zulassen würde, welche den Künstler aller materiellen Hülfsmittel beraubte, und ihn blos dem Gebrauche seiner eigenen Fähigkeiten überließe, und daß es viel leichter für den Mahler sey, die Gegenstände vor Augen zu haben, ihre Tinten zu beobachten und sie nachzubilden; aber wäre er gewöhnt, die Stellung der tangirenden Ebenen und die zwey Krümmungen der Flächen in jedem ihrer Punkte *) zu betrachten, so würde er aus jenem materiellen Hülfsmittel weit größeren Vortheil ziehen,

*) Diese Krümmungen bilden den Gegenstand des fünften Buches.

er würde im Stande seyn, die Wirkungen wieder herzustellen, welche die Weglassung einiger Umstände zu entstehen verhinderte, und jene zu beseitigen, zu denen fremdartige Verhältnisse die Veranlassung gaben.

Endlich geben die schwankenden Ausdrücke, wie Halbflach, Helldunkel ꝛc., welche die Mahler jeden Augenblick anwenden, stehende Beweise, wie nothwendig ihnen genauere Kenntnisse und strengeres Raisonnement seyen.

74. Außer ihrer Nützlichkeit in den Künsten ist die Betrachtung der tangirenden Ebenen und Normalen zu den krummen Flächen, eines der furchtbarsten Mittel, welche die darstellende Geometrie zur Auflösung von Aufgaben anwendet, die mittelst anderer Verfahrungsarten nur sehr schwierig zu lösen wären. Wir werden davon einige Beyspiele beybringen.

75. Die allgemeine Methode zur Bestimmung der tangirenden Ebene zu einer krummen Fläche besteht, nach Art. 70 darin; an dem Berührungspunkt die Tangenten zu zwey verschiedenen Erzeugungslinien, welche durch diesen Punkt gehen, zu konstruiren und durch diese zwey Geraden eine Ebene zu führen.

Wenn eine Fläche zur Erzeugungslinie eine Gerade hat, so muß die tangirende Ebene offenbar die gerade Erzeugungslinie enthalten, welche durch den Berührungspunkt geht, denn diese Gerade ist zu gleicher Zeit eine Linie der Fläche und ihre eigene Tangente, und als solche gehört sie ganz der tangirenden Ebenen an.

76. Diese allgemeine Methode findet jedoch alsdann eine Ausnahme, wenn der Punkt, an welchem die tangirende Ebene geführt werden soll, zugleich ein vielfacher Punkt der Fläche ist. Unter vielfachen Punkten einer Fläche versteht man nemlich jene, welche mehreren Netzen einer Fläche gemein sind. Nehmen wir als Beyspiel einen Cylinder, dessen senkrechter Schnitt eine geschlossene Linie mit einem dopelten Punkte sey. *) Die zwey Tangenten, welche zu dieser Kurve, durch den doppelten Punkt gezogen sind, sind offenbar auch Tangenten zu der Fläche, und dem ungeachtet ist die, durch diese beyden Tangenten gehende Ebene nicht tangirend zu dem Cylinder, denn sie müßte auch die gerade Erzeugungslinie enthalten, die durch den doppelten Punkt geht, (Art. 75.) auf welche sie aber in der That senkrecht ist. Aber man muß bemerken,

---

*) Doppelten Punkt einer krummen Linie nennt man denjenigen, in welchem sich zwey Zweige derselben schneiden, wie zum Beyspiel bey der Linie in Form einer 8 (Lemniscata). Dreyfacher Punkt heißt der gemeinschaftliche Punkt dreyer Zweige, und im Allgemeinen nennt man vielfachen Punkt einer Linie denjenigen, in welchen sich mehrere Zweige derselben Linie kreuzen.

daß diese Erzeugungslinie der Durchschnitt der zwey Netze der Fläche ist, und daß man durch eben diese Gerade zu jedem Netz der Fläche eine tangirende Ebene führen könne. Es folgt aus dem Gesagten, daß, so oft zwey Tangenten von demselben Punkt einer Fläche auslaufen, und zwey verschiedene krumme Linien berühren, die durch diese beyden Tangenten geführte Ebene an demselben Punkt tangirend zu der Fläche sey; vorausgesetzt jedoch, daß der genannte Berührungspunkt nicht zugleich ein vielfacher Punkt der Fläche sey, denn in diesem Falle kann man durch denselben so viele tangirende Ebenen zu der Fläche führen, als diese Netze hat.

Was die Konstruktion der Normalen betrifft, so beschränkt sich diese darauf, eine Senkrechte auf die tangirende Ebene zu errichten; wir werden uns deßhalb einige besondere Fälle ausgenommen, im Allgemeinen nicht näher damit beschäftigen.

Konstruktion tangirender Ebenen zu krummen Flächen, wobey der Berührungspunkt gegeben ist.

77. Vorbemerkung. Wir glauben von nun an ohne Mißverständnisse folgende Abkürzungen im Texte eintreten lassen zu können. Einen Punkt im Raume werden wir durch die Buchstaben seiner Horizontal- und seiner Vertikalprojektion, zwischen eine Parenthese gesetzt bezeichnen. Unter Punkt (A, a) ist demnach der Punkt des Raumes zu verstehen, dessen Projektionen A und a sind. Auf gleiche Weise bezeichnet Linie (A B, $a\,b$) die Linie, deren Projektionen A B und $a\,b$ sind.

Ebene (A B, $a\,b$) bezeichnet die Ebene, deren Risse auf beyden Projektionsebenen die Geraden A B, $a\,b$ sind; und Ebene A B bezeichnet die Ebene, welche als Riß auf einer Projektionsebene die Gerade A B hat, und welche zugleich senkrecht auf dieselbe Ebene ist.

Erste Aufgabe.

Man soll durch einen Punkt einer Cylinderfläche, dessen eine Projektion gegeben ist, eine tangirende Ebene zu der Fläche führen?

78. Auflösung. Es sey (A B, $a\,b$) (Taf. VII. Fig. 1.) die Gerade, zu welcher die Erzeuguugslinie der Cylinderfläche parallel seyn soll; P H Q G sey die, auf der horizontalen Projektionsebene gegebene Grundlinie der Fläche, welche man als ihren Horizontalriß betrachten kann.

Da alle geraden Erzeugungslinien der Cylinderfläche parallel zu der Geraden (A B, $a\,b$) seyn müssen, ziehe man parallel zu A B die Geraden G J, H N tangirend an

den Horizontalriß P H Q G, und nachdem man die projektirenden Geraden P p, Q q ebenfalls berührend an dieselbe Linie gezogen, führe man durch die Punkte p und q, wo diese Geraden die Projektionsaxe L M treffen zu a b die Parallelen p s, q r, so sind G J, H N auf der Horizontalebene, und p s, q r auf der Vertikalebene die Gränzen der Projektionen der Cylinderfläche, oder vielmehr die Gränzen, innerhalb welcher sich alle, der Fläche angehörigen Punkte projektiren.

Dieses festgesetzt, so sey C die gegebene Horizotalprojektion des Punkts, durch welchen die tangirende Ebene geführt werden soll; und dessen Vertikalprojektion zuerst zu konstruiren bleibt.

79. Die Erzeugungslinie des Cylinders, welche durch den Berührungspunkt geht, muß als Horizontalprojektion die unbestimmte Gerade C F haben, welche durch den Punkt C parallel zu A B geführt ist. Um die Vertikalprojektion dieser nemlichen Erzeugungslinie zu erhalten, denken wir uns dieselbe verlängert, bis sie die horizontale Projektionsebene trifft; dieses kann aber nur in einem Punkte geschehen, welcher zu gleicher Zeit auf der Projektion C F und auf der Krummen P H Q G liegt. In unserm Beyspiel ist aber diese Krumme eine Kreislinie, welche die Eigenschaft hat, von einer Geraden in zwey Punkten geschnitten zu werden. Die verlängerte Gerade C F wird daher diese Linie in zwey Punkten D und E durchschneiden und es folgt hieraus, daß der Horizontalprojektion D C F zwey verschiedene Erzeugungslinien entsprechen; eine Erste, welche sich auf den Punkt D des Risses P H G Q anlehnt, und eine Zweyte, welche sich auf den Punkt E stützt. Wenn man daher die Punkte D und E auf die Vertikalebene nach d und e projektirt, und durch diese letzten Punkte die Geraden d f, e f' parallel zu a b zieht, so sind diese die Vertikalprojektionen jener zwey Erzeugungslinien. Da nun die Vertikalprojektion des Berührungspunkts einmal in der Geraden C c liegen muß, welche aus C senkrecht auf die Projektionsaxe gezogen ist, und zweytens in der Geraden d f, oder e f', so ist sie in c oder c', den Durchschnittspunkten dieser Geraden mit der Vertikalen C c. Der Punkt (C, c) oder (C, c') kann daher als Berührungspunkt betrachtet werden, und jedem entspricht eine tangirende Ebene, welche der Aufgabe Genüge leistet, diese hat sonach zwey Auflösungen.

80. Die Erzeugungslinie (D F, d f) ist eine der Geraden, welche die tangirende Ebene am Punkt (C, c) bestimmen; (Art. 75.) und eben so ist die Erzeugungslinie (E F, e f') eine Linie der tangirenden Ebene an dem Punkt (C, c').

Es bleibt also noch für jeden Berührungspunkt die zweyte Gerade zu finden, um die Stellung dieser Ebenen festzusetzen. Wollte man buchstäblich der allgemeinen Methode (Art. 70.) folgen, so müßte man, den Riß P H Q G als eine zweyte Erzeugungslinie betrachtend, sich denselben nacheinander durch jeden Berührungspunkt gehend

vorstellen; und in jedem dieser Punkte eine Tangente zu demselben konstruiren. Allein bey den Cylinderflächen kann man eine weit einfachere Konstruktion anwenden, denn die tangirende Ebene an dem Punkt (C, *c*) berührt die Fläche nicht blos in diesem einzigen Punkt, sondern nach der ganzen Ausdehnung der durch ihn gehenden Erzeugungslinie (D F, *d f*).

In der That, wenn die Kurve P H D G sich so bewegt, daß, während sie sich immer mit dem gleichen Punkte (D, *d*) an die Gerade (D F, *d f*) lehnt, alle ihre übrigen Punkte Parallelen zu dieser Geraden beschreiben, und wenn sie bey dieser Bewegung irgend eine ihrer Tangenten, zum Beyspiel die am Punkt (D, *d*) mit sich führt, so wird die Kurve die vorliegende Cylinderfläche durchlaufen, ihre Tangente wird eine Ebene beschreiben, und offenbar wird diese Ebene die Fläche in allen Punkten der Geraden (D F, *d f*) berühren.

Die tangirende Ebene, welche die Gerade (D F, *d f*) enthält, berührt den Cylinder daher auch in dem Punkt D dieser Geraden, und sie muß folglich durch die Tangente zu dem Riß E P D G im Punkt D gehen. Nach der gleichen Folgerung findet man, daß die tangirende Ebene am Punkt (C, *c'*) durch die Tangente zu dem Riß, im Punkt E gehen muß. Wenn man daher durch die zwey Punkte D, E, zu jener Kurve die Tangenten D K, E L zieht, welche verlängert, die Projektionsaxe L M in den Punkten L und K schneiden, so hat man die Risse der zwey tangirenden Ebenen auf der Horizontalebene.

81. Für jede dieser Ebenen sind sonach zwey Gerade bekannt, durch welche sie geht, und es ist folglich leicht ihre Vertikalrisse zu konstruiren. Da die Berührungslinien (D F, *d f*) (E F, *e f'*) die Vertikalebene nicht mehr innerhalb des Rahmens der Zeichnung treffen; so führe man durch den Punkt (C, *c*) eine Parallele (C I, *c i*) zu dem Horizontalriß D K. Diese Parallele trifft die Vertikalebene in einem Punkt *i*, welchen man mit dem Punkt K verbinde, um den Vertikalriß K *i* der ersten tangirenden Ebene zu erhalten. Auf die gleiche Weise findet man die Gerade L *m* als den Riß der zweyten tangirenden Ebene auf der Vertikalebene.

Wenn die Durchschnittslinie der gegebenen Cylinderfläche mit der Vertikalebene noch auf der Zeichnung konstruirt wäre, so müßten die gefundenen Risse K *i*, G *h* diese Durchschnittslinie in den Punkten berühren, in welchen die Geraden (D F, *d f*), (E F, *e f'*) auf die Vertikalebene treffen.

82. Die vorstehende Aufgabe über die tangirende Ebene zu einer Cylinderfläche giebt uns Veranlassung zu einer Bemerkung über die Tangenten zu den krummen Linien, welche für die darstellende Geometrie äußerst wichtig ist, nemlich:

Die Projektion der Tangente zu irgend einer krummen Linie im Raume ist selbst Tangente zu der Projektion der Linie, und ihr Berührungspunkt ist die Projektion des Berührungspunktes der krummen Linie. Denn in der That, wenn man aus allen Punkten der krummen Linie im Raume sich Senkrechte auf eine der Projektionsebenen, zum Beyspiel auf die Horizontalebene gefällt denkt, so sind alle diese Senkrechten auf einer vertikalen Cylinderfläche gelegen, welche wir (Art. 13.) die projektirende Fläche der Krummen genannt haben, und welche von der Horizontalebene nach der Projektion der krummen Linie selbst geschnitten wird. Wenn man sich eben so durch alle Punkte der Tangente zu der krummen Linie im Raume, Vertikallinien denkt, so sind diese in einer Vertikalebene, der projektirenden Ebene der Tangente enthalten, welche von der Horizontalebene nach der Projektion der Tangente selbst geschnitten wird. Nun aber berühren sich die Cylinderfläche und die Vertikalebene, offenbar nach der ganzen Ausdehnung der aus dem Berührungspunkt gefällten Vertikalen, welche sie gemein haben. Die Durchschnitte der Cylinderfläche und der Vertikalebene durch die horizontale Projektionsebene berühren sich daher in einem Punkte, welcher der Durchschnitt der geraden Berührungslinie der Cylinderfläche und der Vertikalebene ist. Daher endlich berühren sich die Projektionen irgend einer krummen Linie und einer ihrer Tangenten in einem Punkte, welcher die Projektion ihres Berührungspunkts im Raume ist.

Zweyte Aufgabe.

Es ist eine Kegelfläche gegeben mittelst ihrer Basis und ihres Mittelpunktes; man soll durch einen gleichfalls gegebenen Punkt dieser Fläche eine tangirende Ebene zu derselben führen?

83. Auflösung. Es sey A H C B (Taf. VII. Fig. 2.) die gegebene Durchschnittslinie der Kegelfläche durch die horizontale Projektionsebene; (E, *e*) sey der Mittelpunkt der Fläche.

Alle geraden Erzeugungslinien einer Kegelfläche gehen durch den Mittelpunkt derselben; man ziehe daher durch den Punkt E die Tangenten E H, E F an die Krumme A H B C; und man hat die Gränzen der Horizontalprojektion der Kegelfläche. Man ziehe die projektirenden Geraden A *a*, G *g* tangirend an den Horizontalriß A H C B; die Punkte *a*, *g*, wo sie die Projektionsaxe treffen, verbinde man mit der Vertikalprojektion *e* des Mittelpunkts, so hat man, wie leicht zu ersehen, die Gränzen der Vertikalprojektion der Kegelfläche. Es sey endlich D die gegebene Horizontalprojektion des Punktes, durch welchen die tangirende Ebene geführt werden soll.

84. Die Horizontalprojektion der geraden Erzeugungslinie, welche den Berührungspunkt enthält, muß offenbar die, durch D und E gezogene unbestimmte Gerade D E seyn. Diese verlängerte Gerade schneidet den Horizontalriß der Kegelfläche, welche in unserm Beyspiele eine Ellipse A H C B ist, in zwey Punkten B und C, und es ist einleuchtend, daß die beyden geraden Erzeugungslinien der Kegelfläche, welche durch diese Punkte der Grundlinie gehen, die gleiche Horizontalprojektion B E K haben, und daß man die Vertikalprojektionen dieser nemlichen Geraden erhalte, wenn man die Punkte B und C auf die Vertikalebene nach b und c projektirt, und durch diese letzten Punkte die Geraden $b\,e$, $c\,e$ führt. Da nun diese beyden Geraden $b\,e$ und $c\,e$ die Vertikalprojektion des Berührungspunktes enthalten können, so ist diese in d oder d', in welchen beyden Punkten die aus D errichtete Vertikale die Geraden $b\,e\,k$, $c\,e\,k'$ durchschneidet.

Es folgt hieraus, daß entweder (D, d) oder (D, d') der Punkt der Kegelfläche ist, durch welchen die tangirende Ebene geführt werden soll, und daß die gerade Erzeugungslinie (B E K, $c\,e\,k'$) der tangirenden Ebene an dem ersten, und die Erzeugungslinie (C E K, $b\,e\,k'$) der tangirenden Ebene am zweyten Punkte angehöre (Art. 75.)

85. Nun läßt sich aber leicht nach der nemlichen Beweisart, welche wir in Bezug auf die tangirende Ebene zu den Cylinderflächen angewendet haben, (Art. 80.) darthun, daß die Kegelfläche von einer Ebene nicht nur in einem einzigen Punkte berührt werde, sondern nach der ganzen Ausdehnung der durch jenen Punkt gehenden geraden Erzeugungslinie.

Da nun die gerade Erzeugungslinie (B E K, $b\,e\,k$) der einen tangirenden Ebene, und die Erzeugungslinie (C E K, $c\,e\,k'$) der Anderen die Grundlinie der Kegelfläche in den Punkten B und C treffen, so folgt daraus, daß die beyden tangirenden Ebenen, welche den Bedingungen der Aufgabe genügen, durch die Tangenten B T, C N gehen, welche durch B und C zu der Ellipse A H C B gezogen sind. Diese Tangenten sind zugleich die Risse der beyden tangirenden Ebenen auf der horizontalen Projektionsebene; die Risse T j, N i derselben Ebenen auf der vertikalen Projektionsebene bestimme man nach demselben Verfahren, was wir bey der Cylinderfläche (Art. 81.) angewendet haben.

86. In Betreff der Ausführung der Tafel VII müssen wir hier noch Einiges anführen.

Fig 1. Wir haben die gegebene Cylinderfläche als wirklich im Raume vorhanden angenommen, und alle Linien dieser Fläche, je nachdem sie auf einer oder der andern Projektion dem gesehenen, oder dem vom Auge abgewendeten Theile der Fläche angehörten, mit vollen oder punktirten Linien bezeichnet.

Auf der Horizontalebene entsprechen die begränzenden Geraden G J, H N als Pro-

jektionen zweyen Kanten der gegebenen Cylinderfläche und es läßt sich leicht zeigen, daß diese nemlichen Kanten in der Horizontalprojektion den gesehenen Theil der Fläche von dem, vom Auge abgewendeten trennen; denn man betrachte die genannten Geraden G J, H N als die Risse zweyer Vertikalebenen, die den Cylinder nach zwey Kanten berühren, deren Projektionen eben jene Geraden G J, H N sind. Diese berührenden Ebenen, da sie parallel unter sich sind, und senkrecht auf die Projektionsebene, werden sich im Auge, das wir in unendlicher Entfernung über derselben Ebene annehmen, schneiden, und dieses kann daher offenbar nur den oberhalb der beyden in G J, H N projektirten Berührungskanten gelegenen Theil der Cylinderfläche überschauen. Da nun die Geraden G J, H N die Grundlinie P H D G in G und H berühren, so kann demzufolge nur der Bogen G E H dieser Grundlinie gesehen werden, der Bogen H D G hingegen wird bedeckt seyn; und alle Kanten der Fläche, welche auf die Punkte des erstgenannten Bogens treffen, werden sonach gesehen, die Uebrigen aber bedeckt seyn. Von der Reihe der letzteren ist die Kante (Q R, q r).

Für die Vertikalprojektion ergiebt sich nach den ganz gleichen Folgerungen, daß die Kanten, deren Projektionen die begränzenden Geraden p s, q r sind, den gesehenen von dem bedeckt scheinenden Theil der Fläche trennen. Wenn man daher den zur Projektionsaxe parallelen Durchmesser P Q der kreisförmigen Grundlinie P D G zieht, so sind P und Q die Punkte, wo die in p s und q r projektirten Kanten auf die Grundlinie treffen, daher werden in der Vertikalprojektion alle Kanten, welche dem Bogen P G Q jener Grundlinie angehören, gesehen seyn; diejenigen hingegen, welche wie (H N, h n) sich auf die Punkte des Bogens P H Q stützen, bedeckt erscheinen.

87. Fig. 2. Alles über die Projektionen der Cylinderfläche Gesagte, findet eine gleichmäßige Anwendung auf die Projektionen der Kegelfläche Fig. 2. Nur ist hier noch zu bemerken, daß in jeder Projektion alle Kanten der Kegelfläche, welche auf dem einen Netze gesehen sind, auf dem andern Netze nothwendig dem bedeckten Theile angehören, und eben so umgekehrt.

Wenn, wie in dem vorliegenden Beyspiele, die Grundlinie der Kegelfläche eine Ellipse ist, so bestimmt man auf der Horizontalebene die Durchschnittspunkte A, G dieser Ebene und derjenigen Kanten, deren Vertikalprojektionen die begränzenden Geraden e a, e g sind, wenn man den zusammengehörigen Durchmesser A G zu demjenigen konstruirt, welcher senkrecht auf die Projektionsaxe ist. Die Endpunkte jenes Durchmessers sind die gesuchten Punkte A, G. A E ist demnach die Horizontalprojektion derselben Geraden, welche vertikal in a e projektirt ist. Die übrigen Linien beyder Figuren der Tafel bedürfen keiner weiteren Erklärung.

Dritte Aufgabe.

Man soll durch einen gegebenen Punkt einer Umdrehungsfläche eine tangirende Ebene zu der Fläche führen?

88. Auflösung. Die Fläche sey gegeben durch ihre Axe, und ihren Erzeugungsmeridian, nnd wir nehmen die horizontale Projektionsebene senkrecht auf die Axe der Fläche an, wodurch die Allgemeinheit der Auflösung in nichts geändert wird.

Es sey demnach (A, $a\ a'$) (Taf. VIII.) die Umdrehungsaxe; L M der Durchschnitt der Projektionsebenen. In einer zur vertikalen Projektionsebene parallelen Meridianebene L′ M′ sey der Erzeugungsmeridian (D D′, $b\ d\ f\ e\ d'$) gegeben. Nachdem man die projektirenden Geraden d D, d' D′ tangirend an die Linie $b\ d\ f\ e\ d'$ gezogen, beschreibe man aus A als Mittelpunkt und mit einem Halbmesser A D $= \frac{1}{2}\ d\ d'$ einen Umkreis D B D′, so hat man die Horizontalprojektion des größten Parallelkreises der Fläche. Der Berührungspunkt sey durch seine Horizontalprojektion G gegeben.

89. Dieser festgesetzt denken wir uns durch den Berührungspunkt eine Meridianebene geführt, deren Horizontalprojektion die unbestimmte Gerade A G ist. Diese Ebene wird die Fläche nach einem Meridiane schneiden, und wenn man aus dem Punkt G eine Vertikale errichtet, so wird diese den Meridian, und folglich die Umdrehungsfläche in einem, oder in mehreren Punkten treffen, welches eben so viele Berührungspunkte sind, von denen G die gemeinsame Horizontalprojektion ist. Um diese Punkte zu finden, denken wir uns die Meridianebene A G mittelst einer Drehung um die Axe (A, $a\ a'$) auf die Ebene L′ M′ zurückgelegt. Es werde sodann A G nach A G′ getragen, und die Vertikale G′ $e\ e'$ errichtet, welche den Meridian $d\ f\ e\ d'$ in den Punkten e, e' schneidet, so geben diese Punkte die Höhen der Berührungspunkte über der Horizontalebene an. Wenn man daher durch e und e' unbestimmte Horizontallinien $e\ g$, $e'\ g'$ zieht, so müssen in diesen Horizontalen die Vertikalprojektionen jener nemlichen Berührungspunkte enthalten seyn; diese Vertikalprojektionen sind folglich die Begegnungspunkte g, g' der Horizontalen $e\ g$, $e'\ g'$ mit der, aus G senkrecht auf die Projektionsaxe errichteten Geraden G $g\ g'$.

Der bekannte Berührungspunkt ist sonach (G, g), oder (G, g') und es sind sofort die Risse der tangirenden Ebenen an diesen Punkten zu bestimmen.

Denken wir uns zu diesem Ende, durch jeden Berührungspunkt den Parallelkreis der Umdrehungsfläche, welcher diesem Punkte entspricht, und den man als eine Erzeugungslinie der Fläche betrachten kann, so werden die zu bestimmenden tangirenden Ebenen durch die Tangenten zu diesen Kreisen an den bekannten Berührungspunkten gehen. Aber diese beyden Tangenten sind senkrecht auf die Meridanebene A G, der die Berührungspunkte an-

gehören, daher müssen die tangirenden Ebenen ebenfalls senkrecht auf die nemliche Meridianebene seyn, und folglich ihre Risse auf der Horizontalebene senkrecht auf A G.

Um nun die Stellung der gesuchten tangirenden Ebenen vollends zu bestimmen, muß für jede noch eine zweyte in ihr enthaltene Tangente zu der Umdrehungsfläche konstruirt werden.

Hiezu ziehe man durch die, auf die Ebene L′ M′ zurückgelegten Berührungspunkte (G′, e), (G′, e') zu dem Meridian (L′ M′, $b\ d\ f\ e$) die Tangenten (D D′, $e\ \alpha$), (D D′, $e'\ a'$), welche verlängert die Drehungsaxe in den Punkten (A, α), (A, a') treffen. Es ist leicht einzusehen, daß die Tangenten zu dem Meridian der Ebene A G H an den Punkten (G, g), (G, g') ebenfalls durch dieselben Punkte (A, α), (A, a') gehen werden; denn wenn der Meridian (D D′, $d\,f\ e$) sich um die Axe (A, $a\ a'$) dreht um die Umdrehungsfläche zu erzeugen, und wenn er dabey die Tangenten an den Punkten (G′, e), (G′; e') mit sich führt, so werden diese während der Bewegung nicht aufhören, durch die nemlichen Punkte (A, α), (A, a') der Axe zu gehen, und ihre Berührungspunkte, welche auf dem Meridian unveränderlich sind, werden die Parallelkreise der Fläche durchlaufen, denen die Punkte (G, g), (G, g') angehören. Die Tangenten an diesen letzten Punkten des Meridians der Ebene A G haben daher zu Projektionen die Geraden (A G H, $\alpha\ i\ g$), (A G H, $a'\ g'\ h$). Sie treffen die horizontale Projektionsebene in den Punkten I und H, die den Horizontalrissen der gesuchten tangirenden Ebenen angehören, und dieses sind daher die auf A G senkrechten Geraden I Q, H P.

Nachdem man diese Risse bis an die Projektionsaxe verlängert, führe man, zur Bestimmung der Vertikalrisse derselben tangirenden Ebenen, durch jeden Berührungspunkt eine Parallele (G K, $g\ k$), (G K, $g'\ k'$), zu dem entsprechenden Risse, I Q, H P. Diese Parallelen, welche nichts anderes sind, als die Tangenten zu den Parallelkreisen der beyden Berührungspunkte, treffen die Vertikalebene in den Punkten k und k', welche die Vertikalrisse Q k der ersten, und P k' der zweyten tangirenden Ebene bestimmen.

90. Wir haben als Beyspiel eine Fläche gewählt, welche durch die Umdrehung einer Ellipse um ihre große Axe hervorgebracht ist, und der man die Benennung Umdrehungs-Ellipsoid, oder auch Sphäroid giebt. Die beyden Berührungspunkte des Ellipsoids sind nach der Annahme der Projektionsebenen in gleichem Abstande von der Ebene des Parallelkreises (D B D′, $d\ d'$). Die Horizontalrisse I Q, H P der tangirenden Ebenen an diesen Punkten sind parallel unter sich, und die Vertikalrisse derselben schneiden sich in einem Punkt m, welcher in der Verlängerung der Geraden $d\ d'$, der kleinen Axe der Erzeugungsellipse liegt, und zwar in Folge dessen, weil sich die Tan-

genten an den Punkten e, e' dieser Ellipse, in einem Punkte m' der nemlichen Axe begegnen, was eine bekannte Eigenschaft der Ellipse ist.

* * *

91. Die Auflösung der vorstehenden Aufgabe leitet uns auf folgende allgemeine Eigenschaften der Umdrehungsflächen in Bezug auf ihre Tangenten und ihre Normalen.

1tens Alle Tangenten zu den verschiedenen Meridianen einer Umdrehungsfläche, deren Berührungspunkte auf einem nemlichen Parallelkreise liegen, gehen durch einen und denselben Punkt der Axe der Fläche, sie bilden zusammen einen geraden Kegel, welcher um die Umdrehungsfläche umschrieben ist, und sie nach Parallelkreise berührt.

2tens Alle Normalen zu einer Umdrehungsfläche, welche durch die Punkte eines nemlichen Meridians gehen, sind auch Normale zu eben diesem Meridian, denn einmal ist jede von ihnen senkrecht auf die entsprechende Tangente zu dem Meridiane, und zweytens sind sie alle in der Ebene desselben enthalten, weil alle tangirenden Ebenen zu einer Umdrehungsfläche längs den Punkten eines ihrer Meridiane senkrecht auf die Ebene desselben sind. Umgekehrt ist daher eine Normale zu einem Meridian auch zugleich Normale zu der Fläche; es folgt hieraus

3tens, daß alle Normalen einer Umdrehungsfläche durch die Axe gehen, und daß

4tens alle Normalen längs den Punkten eines Parallelkreises durch einen nemlichen Punkt der Axe gehen, und daß sie eine gerade Kegelfläche bilden, welche selbst normal auf die Umdrehungsfläche ist.

Es ergiebt sich aus diesen Eigenschaften die direkte Auflösung der folgenden Aufgabe.

Vierte Aufgabe.

Man soll durch einen gegebenen Punkt einer Umdrehungsfläche eine Normale zu der Fläche führen?

92. Auflösung. Es sey (A, $a\,a'$) Taf. VIII. die Axe der Fläche $b\,d\,f\,e$ der Erzeugungsmeridian in einer Ebene L′M′. parallel zur Vertikalebene betrachtet; und (S, s) sey der gegebene Punkt, durch welchen die Normale geführt werden soll. *)

Diese Normale muß einmal in der, durch den Punkt (S, s) gehenden Meridianebene A S enthalten seyn, und sie ist bestimmt, sobald man den Punkt kennt, in wel-

*) Wir nehmen an, die beyden Projektionen S, s des Punkts der Umdrehungsfläche seyen nach dem oben (Art. 89) angegebenen Verfahren konstruirt.

chem sie die Axe durchschneidet. Zu diesem Zweck betrachte man die Meridianebene A S als auf die Ebene L″ M′ zurückgelegt, indem sie eine Drehung um die Axe (A, *a a′*) gemacht hat. Der gegebene Punkt wird, nach dieser Bewegung die Stellung (S′, s′) annehmen, und wenn man durch (S′, *s′*) die Normale (S′ A, *s′ v*) zu dem Meridian *b d f e* errichtet, so ist diese zugleich Normale zu der Fläche und (A, *v*) ist der Punkt, in welchem sie die Axe durchschneidet. Nun aber liegen die Punkte (S′, s′) und (S, s) auf einem und demsemben Parallelkreis der Umdrehungsfläche; die Normalen der Fläche an diesen Punkten, müssen sich daher in einem Punkt der Axe kreuzen, und folglich ist die Gerade (A S, *v* s) die verlangte Normale der Umdrehungsfläche am Punkte (S, s).

Diese Konstruktion kann auch zur Lösung der vorhergehenden dritten Aufgabe dienen: denn wenn man durch die gegebenen Punkte (G, *g*), (G, *g′*) (Taf. VIII.) die Normalen zu der Fläche führt, und durch jeden Punkt eine Ebene senkrecht auf die zugehörige Normale; so sind diese die verlangten tangirenden Ebenen.

---

93. Wir beschränken uns für den Augenblick auf diese vier Beyspiele über die tangirenden Ebenen zu den krummen Flächen. Im folgenden Kapitel werden wir die Erzeugung anderer zahlreicher Familien von Flächen vortragen, und auf diese sodann dieselben Methoden zur Bestimmung ihrer tangirenden Ebenen und ihrer Normalen anwenden. Schließlich wollen wir noch eine zweyte Auflösung der vierzehnten Aufgabe im ersten Kapitel geben, welche auf die Betrachtung der tangirenden Ebenen gegründet ist.

Fünfte Aufgabe.

Man soll die kürzeste Entfernung zweyer gegebenen Geraden konstruiren?

95. Auflösung. (Fig. 2. Taf. V.) Wir haben die gleichnamigen Gegenstände mit denselben Buchstaben bezeichnet, wie in der Figur 1., welche sich auf die erste Auflösung dieser Aufgabe (Art. 50.) bezieht.

Nachdem man den Horizontalriß A E F einer Ebene konstruirt hat, welche durch die erste gegebene Gerade (A B, *a b*) parallel zu der Zweyten (C D, *c d*) geführt ist; betrachte man dieselbe als tangirende Ebene zu einem geraden Cylinder von kreisförmiger Grundlinie, welcher als Axe die Gerade (C D, *c d*) hat, und als Halbmesser, die gesuchte Entfernung. Diese Cylinderfläche wird von jener Ebene nach einer Geraden berührt werden, welche parallel zu der Axe ist, und welche die erste Gerade (A B, *a b*) in einem Punkte schneidet. Wenn man durch diesen Punkt eine Senkrechte auf obige Ebene errichtet, so schneidet diese sowohl die erste als auch die zweyte Gerade senkrecht, denn sie

ist der Halbmesser eines Cylinders, von welchem diese zweyte Gerade die Axe ist, und auf ihr wird folglich die gesuchte kürzeste Entfernung gemessen.

Um die Berührungslinie der Cylinderfläche mit der Ebene, welche parallel zu den zwey gegebenen Geraden ist, zu finden, führe man durch irgend einen Punkt, der als Axe angenommenen Geraden, (zum Beyspiel durch den Punkt C, in welchem sie die Horizontalebene durchschneidet) eine Ebene senkrecht auf diese Axe. Der Durchschnitt dieser Ebene mit der tangirenden Ebene ist die Berührungslinie dieser Letzten mit der kreisförmigen Grundlinie des Cylinders.

Nachdem die Vertikalebene C D sich um ihren Riß C D gedreht, und auf die Horizontalebene zurückgelegt hat, konstruire man den Winkel β C β' den die zweyte Gerade (C D, $c\ d$) mit der Horizontalebene macht, indem man eine Vertikale $\beta'\ \beta = b'\ b$ nimmt. Dieselbe Vertikalebene schneidet die, zu den zwey Geraden parallele Ebene nach der Geraden F K, parallel zu C β'. Daher schneidet die, durch C, und senkrecht auf die Axe geführte Ebene die Vertikalebene C D nach der Geraden C K, senkrecht auf C β' oder F K, und die Horizontalebene nach der auf C D senkrechten Geraden C H.

Nachdem dieselbe Ebene sich um ihren Horizontalriß C H gedreht hat, um sich auf die horizontale Projektionsebene zurückzulegen; fällt der Punkt K nach K'; der Punkt H des Risses bleibt fest, und die Gerade H K' ist der Durchschnitt der tangirenden Ebene zu der Cylinderfläche mit der Ebene, welche senkrecht auf die Axe dieser Fläche ist. Wenn man daher aus dem Punkt C die Senkrechte C I auf jene Gerade H K' fällt, so ist der aus C als Mittelpunkt, und mit einem Halbmesser = C I beschriebene Kreis die Grundlinie der Cylinderfläche, und I N ist die Horizontalprojektion der Berührungskante. Diese Kante schneidet die erste Gerade in dem Punkt (N, n), durch welchen die gesuchte Senkrecht geht.

Der letzte Theil der Auflösung vollendet sich wie die in Art. 43. Vorgetragene, auf welche wir zurückweisen.

Drittes Kapitel.

Fortsetzung der Erzeugung der Flächen.

Von den aufwickelbaren und den windischen Flächen.

95. Alle Flächen, welche durch die Bewegung einer geraden Linie erzeugt werden können, bilden zwey große Klassen; sie sind entweder *aufwickelbare* oder *windische Flächen*.

Wenn vermöge des Gesetzes, wodurch die Bewegung der geraden Erzeugungslinie vorgeschrieben ist, immer zwey aufeinanderfolgende Stellungen dieser Geraden betrachtet werden können, als in einer nemlichen Ebene liegend; das heißt, wenn sie entweder parallel unter sich sind, oder wenn sie sich in einem Punkte begegnen, so gehört die erzeugte Fläche zu der Klasse der aufwickelbaren Flächen.

Im andern Falle, und zwar im Allgemeinsten, wenn nemlich je zwey aufeinanderfolgende gerade Erzeugungslinien nicht in einer und derselben Ebene enthalten sind, entsteht durch die Bewegung dieser Geraden eine windische Fläche.

Aus diesen Erklärungen ist ersichtlich, daß die Kegelflächen und die Cylinderflächen zufolge ihrer Erzeugungsart durch die gerade Linie zu der erstgenannten Klasse gehören.

97. Die Bedingung, eine aufwickelbare Fläche zu erzeugen, wird am Allgemeinsten ausgedrückt, wenn man der geraden Erzeugungslinie auferlegt, sich dergestalt zu bewegen, daß sie beständig tangirend ist, zu einer gegebenen krummen Linie von doppelter Krümmung.

In der That, es sey A B C D (Taf. XII. Fig. 1.) eine doppelt gekrümmte Linie von beliebiger Stellung im Raume; denken wir uns alle möglichen Tangenten a A a', b B b', c C c', . . . ꝛc. dieser Linie, so sind diese eben so viele Stellungen der beweglichen Geraden, und es ist leicht zu ersehen, daß die krumme Fläche, die sie alle zusammen bilden, der gegebenen Erklärung (Art. 97.) einer aufwickelbaren Fläche vollkommen entspreche; denn irgend eine Erzeugungslinie, wie b B b' wird von der unmittelbar vorhergehenden Geraden a A a', und der unmittelbar Nachfolgenden c C c' in zwey, auf der Krummen A B C D gelegenen Punkten A und B geschnitten, weil diese Geraden als Tangenten der Krummen A B C D die Verlängerungen ihrer aneinanderstoßenden Elemente sind.

98. Man nennt jede einzelne Stellung der geraden Erzeugungslinie eine Kante der aufwickelbaren Fläche. Je zwey aufeinanderfolgende Kanten schließen ein Flächenelement ein, das man als ein unendlich schmales, und in der Richtung der begränzenden Kanten, unbestimmtes Stückchen einer Ebene betrachten kann. Alle diese Elemente der Fläche lassen sich, ohne auseinander gerissen zu werden, und ohne sich zu verdoppeln, auf eine Ebene aufrollen oder aufwickeln. Man kann sich in der That vorstellen, daß das erste Element a b B sich um die Kante b B, welche es mit dem Zweyten b c C verbindet, als ein Scharnier drehe, bis es in der nemlichen Ebene ist wie dieses Element; daß sodann diese beyden vereinigten Elemente sich um die Kante d D, die sie mit dem Dritten verbindet, drehen, bis sie mit diesem dritten Elemente in einer nemlichen Ebene sind, und sofort; und es ist einleuchtend, daß die ganze Fläche sich dergestalt ohne Unterbrechung des Zusammenhanges,

und ohne Verdoppelung auf eine Ebene aufwickeln lasse, welche Eigenschaft den aufwickelbaren Flächen ihren Namen gegeben hat.

99. Wenn man den Begriff der Aufwicklung auf die durch ebene Flächen begränzten Körper überträgt, so sieht man sogleich, daß die Seitenflächen aller Pyramiden und aller Prismen, wenn man ihre Grundflächen außer Acht läßt, welches blos zufällige Gränzen dieser unbestimmt betrachteten Körper sind, sich auf die Ebene irgend einer Seite neben einander auflegen lassen ohne einen leeren Raum zwischen sich zu lassen, und ohne irgend einer Verdopplung zu unterliegen.

Will man diese nemliche Operation bey einem Körper anderer Art, zum Beyspiel bey einem Ikosaeder, bey einem Dodekaeder anwenden, so ist eben so leicht zu ersehen, daß sie nicht statt finden könne, ohne daß zwischen den verschiedenen Theilen der Aufwicklung leere Räume bleiben.

Die Prismen und Pyramiden sind jedoch nicht die einzigen Körper, deren Seitenflächen sich ohne eine Unterbrechung des Zusammenhanges auf eine Ebene aufwickeln lassen, sondern dieses kann jedesmal geschehen, wenn die Oberfläche eines vorgelegten Körpers durch winkelförmige unbestimmte Stücke von Ebenen gebildet wird, die nach ebenfalls unbestimmten Kanten aneinanderstoßen, und wenn auch diese winkelförmigen Seiten ihre Scheitel nicht in einem nemlichen Punkte hätten.

100. Betrachtet man nun irgend eine andere krumme Fläche als eine aufwickelbare, so läßt sich dieselbe immer auf irgend eine Art, zum Beyspiel, durch zwey Systeme paralleler Ebenen in so viele Theile getheilt denken, daß keiner von ihnen merkbar von einem ebenen Elemente verschieden ist. Aber wenn alle diese Theilchen auf eine Ebene ausgebreitet werden sollten, so daß zwey aneinanderstoßende Theilchen eine gemeinschaftliche Seite hätten, so würden sie leere Räume zwischen sich lassen, oder sich übereinander schieben, und der, durch den äußeren Umriß dieser so ausgebreiteten Theilchen eingeschlossene Flächenraum, würde nicht von gleicher Größe seyn, mit dem krummen Flächenstück, das von allen jenen Theilchen gebildet wird. Die aufwickelbaren Flächen besitzen daher allein die Eigenthümlichkeit, ohne Zerreißung oder Verdopplung auf eine Ebene aufgewickelt werden zu können; weil sie die Einzigen sind, deren ebene Elemente eine, in der Richtung der Kanten der Flächen unbegränzte Ausdehnung haben.

101. Die Kegel- und die Cylinderflächen, lassen sich leicht als besondere Arten der (Art. 97.) erklärten allgemeinen aufwickelbaren Fläche ableiten. In der That besteht die Eigenthümlichkeit dieser Letztern darin, daß ihre aufeinanderfolgenden geraden Erzeugungslinien sich zu zwey und zwey auf einer Linie von doppelter Krümmung, welche sie alle berührt, kreuzen; und sich von da aus unbestimmt nach beyden Seiten ver-

längern. Sie bilden dadurch zwey unterschiedene aber vollkommen ähnliche Flächennetze, die selbst nach jener Krummen, welche man die Rückkehrkante der aufwickelbaren Fläche nennt, dergestalt berührend aneinander stoßend, daß kein Theil der Fläche sich in den, durch die Höhlung jener krummlinigen Kante begränzten Raum ausdehnt. Indem man die Fläche durch eine beliebige Ebene schneidet, erhält man als Durchschnitt eine Kurve mit einem Rückkehrpunkte (Art. 408.), und dieser ist der Begegnungspunkt der schneidenden Ebene mit der Rückkehrkante. *) Diese merkwürdige Linie der aufwickelbaren Flächen ist, welches außerdem auch die eigenthümliche Beschaffenheit der Fläche seyn mag, immer eine Zentrallinie derselben.

Wenn die Rückkehrkante sich auf einen einzigen Punkt reduzirt, in dem sich sämmtliche geraden Erzeugungslinien kreuzen, so entsteht eine Kegelfläche, und jener Punkt ist ihr Mittelpunkt.

Die Kegelfläche wird eine Cylinderfläche, wenn der Mittelpunkt in eine unendliche Entfernung übergeht, so daß sämmtliche geraden Erzeugungslinien parallel unter sich werden.

Bey der Erzeugung der Umhüllungsflächen, zu Ende dieses Kapitels, werden wir noch eine andere Entstehungsart der aufwickelbaren Flächen kennen lernen.

Von den windischen Flächen.

103. Die Bewegung einer Geraden als Erzeugungslinie einer Fläche erfodert um bestimmt zu seyn, im Allgemeinen drey Bedingungen.

Wenn die entstehende Fläche eine aufwickelbare seyn soll, so ist hiemit schon die eine Bedingung ausgesprochen, daß je zwey aufeinanderfolgende Erzeugungslinien in einer Ebene seyn müssen, und man hat nur noch zwey weitere Bedingungen nöthig; zum Beyspiel, man läßt die bewegliche Gerade beständig eine gegebene Kurve und einen gegebenen festen Punkt durchschneiden, wie bey der Erzeung der Kegelflächen, oder eine Kurve durchschneiden und dabey stets parallel zu einer bestimmten Richtung bleiben wie die gerade Erzeugungslinie der Cylinder; endlich ist die alleinige Bedingung, daß die bewegliche Gerade stets eine gegebene Kurve von doppelter Krümmung berühren soll, hinreichend um ihren Weg festzusetzen.

Im Allgemeinen aber werden drey Bedingungen erfodert, um die Bewegung der

*) Nach dieser Analogie zwischen dem Rückkehrpunkte (point de rebroussement) gewisser Kurven, und der Rückkehrkante (arête de rebroussement) der aufwickelbaren Flächen wurde von Monge die Benennung der letzteren gebildet.

geraden Erzeugungslinie zu leiten. Es ist in der That leicht einzusehen, daß wenn eine bewegliche Gerade nur den zwey Foderungen entsprechen sollte, stets zwey Linien von doppelter Krümmung zu schneiden: ihre Bewegung dadurch nicht festgesetzt wäre. Denn, nachdem man die Gerade durch irgend einen Punkt der ersten krummen Leitlinie geführt hat, kann sie noch alle Punkte der zweyten Kurve durchlaufen, und ihre Stellung ist somit nicht bestimmt. Fügen wir nun noch eine dritte Bedingung bey; und unter allen, die wir wählen könnten, diese: die Gerade soll bey ihrer Bewegung immer horizontal bleiben; so ist diese Bewegung, und somit auch die Erzeugung einer Fläche bestimmt. Will man zum Beyspiel die Erzeugungslinie konstruiren, die einem beliebigen Punkte der einen Leitlinie entspricht, so hat man nur durch diesen Punkt eine horizontale Ebene zu führen, und nachdem man ihren Durchschnitt mit der zweyten Leitlinie bestimmt, diesen Punkt mit dem Erstgenommenen durch eine Gerade zu verbinden.

Es ist einleuchtend, daß, wenn nicht einige besondere Umstände hiebey obwalten, die das Gegentheil möglich machten, je zwey aufeinanderfolgende gerade Erzeugungslinien nicht in einer Ebene seyn können; sie werden übereinander weggehen, indem sie sich in ihren Richtungen kreuzen, was die charakteristische Eigenthümlichkeit der windischen Flächen ausmacht.

104. Das Element einer windischen Fläche, was zwey aufeinanderfolgende gerade Erzeugungslinien einschließen, ist in der Richtung dieser Geraden von unbegränzter Ausdehnung, aber es ist, wie klein auch die Entfernung der einschließenden Erzeugungslinien seyn mag, kein Stück einer Ebene, sondern ein krummflächiges Element in jedem seiner Punkte, und von der Gestalt einer sogenannten windischen oder windschiefen Ebene; weßhalb man auch allen, aus derartigen Elementen zusammengesetzten, Flächen die Geschlechtsbenennung „windisch" gegeben hat.

Diese Flächen haben zwar die Gerade zur Erzeugungslinie, wie die Aufwickelbaren; aber sie können nicht wie diese Letzteren eine Rückkehrkante haben. Denkt man sich immer zwey aufeinanderfolgende Erzeugungslinien einer windischen Fläche durch die Gerade geschnitten, welche senkrecht auf beyde ist; so bilden die Fußpunkte aller dieser Senkrechten auf der windischen Fläche eine besondere Linie, welche man die Einziehungslinie (courbe de striction) *) nennen kann.

105. Die allgemeinste windische Fläche wird durch eine Gerade erzeugt, der man

*) Anm. Diese Linie enthält offenbar die kürzeste Entfernungen aller Geraden der windischen Fläche, so daß dieselbe nach dieser Linie am engsten, oder gewissermaßen eingeschnürt erscheint; daher die Benennung der Linie.

auferlegt, sich auf drey gegebenen krummen Linien zu bewegen. Nimmt man einen Punkt der einen krummen Leitlinie als Scheitel eines Kegels, welcher die zweyte Krumme als Basis hat, so wird dieser die dritte Krumme in einem oder mehreren Punkten schneiden, und die Gerade, welche durch einen dieser Letzten, und durch den Punkt der ersten Kurve geführt ist, lehnt sich zu gleicher Zeit auf alle drey gegebenen Kurven.

Wenn man diese drey Bedingungen zum Theil oder ganz durch andere ersetzt; indem man zum Beyspiel der Geraden aufgiebt, sich auf zwey Krummen und einer Fläche zu bewegen; oder auf zwey Flächen und einer Kurve; oder auf drey Flächen; oder auf zwey Flächen, wobey sie einen bekannten Winkel mit einer gegebenen Ebene macht, so entsteht durch diese Bewegung, im Allgemeinen, eine windische Fläche.

Sehr häufig sind zwey Leitlinien gegeben, und eine Ebene, zu welcher die bewegliche Gerade beständig parallel bleiben soll. Wenn in diesem Falle, die Eine der beyden Leitlinien eine Gerade wird, so entsteht eine Fläche, welche unter dem Namen **Konoid** bekannt ist, weil sie einige Aehnlichkeit mit dem Kegel (conus) hat. Ist bey dem Konoid die gerade Leitlinie senkrecht auf die Ebene des Parallelismus, so erhält die Fläche die Benennung **gerades Konoid**, und jene gerade Leitlinie ist zugleich die Einziehungslinie derselben.

Von den Umhüllungsflächen.

106. Wenn eine Fläche von beständiger oder veränderlicher Gestalt sich nach gewissem Gesetze bewegt, so durchläuft sie einen Raum, dessen Gränze oder Umhüllung eine gewisse krumme Fläche ist. Man nennt die Flächen, die auf solche Weise hervorgebracht werden können, **Umhüllungsflächen** oder auch nur **Umhüllungen**; der beweglichen Erzeugungsfläche giebt man den Beynamen der **umhüllten**.

Betrachten wir eine umhüllte Fläche in drey unmittelbar aufeinanderfolgenden Stellungen: die Zweyte und die Erste werden sich nach einer gewissen krummen Linie schneiden, die Zweyte und die Dritte werden sich nach einer ähnlichen Linie schneiden; der geometrische Ort alle so aufeinanderfolgenden Durchschnitte ist die Umhüllung des von der beweglichen Fläche durchlaufenen Raumes.

Man denke sich zum Beyspiel eine im Raume bewegliche Kugel, von beständigem oder veränderlichem Halbmesser, deren Mittelpunkt eine bekannte Linie durchläuft. Wenn man bemerkt, daß zwey Kugeln sich nach einem Kreise schneiden, dessen Ebene senkrecht auf die, durch ihre Mittelpunkte gezogene Gerade ist, so wird man leicht einsehen, daß die Umhüllung dieser beweglichen Kugel, oder vielmehr des von ihr durchlaufenen Raumes, eine **röhrenförmige** Fläche sey, deren Schnitte senkrecht auf die Kurve, in wel-

cher sich der Mittelpunkt der Kugel bewegt, Kreise sind. Eine dieser Erzeugung unterworfene Fläche ist die der gewundenen Säule, welche nichts anderes ist, als die Umhüllung des von einer Kugel, von veränderlichem Halbmesser durchlaufenen Raumes, deren Mittelpunkt in einer Schraubenlinie von vertikaler Axe läuft.

Die aufeinanderfolgenden Durchschnitte der umhüllten Fläche sind die eigentlichen Erzeugungslinien der Umhüllungsfläche; aber diese Durchschnitte oder Erzeugungslinien sind bey allen Umhüllungen, die durch eine nemliche umhüllte Fläche hervorgebracht werden können, ähnlich, und sie geben diesen Umhüllungen gewissermaaßen einen gemeinsamen Charakter, weßhalb man ihnen den Namen Charakteristiken gegeben hat, um sie von den gewöhnlichen Erzeugungslinien auszuzeichnen.

107. Betrachtet man eine im Raume bewegliche Fläche, und ihre Umhüllung, welche der Ort ihrer aufeinanderfolgenden Durchschnitte ist, so wird man leicht einsehen, daß die Umhüllungsfläche jede Stellung der Umhüllten nach einer, dieser Stellung entsprechenden Charakteristik berühre; weil je zwey Charakteristiken, aufeinanderfolgend betrachtet, sich zu gleicher Zeit auf der umhüllten, und der Umhüllungsfläche befinden, und diese daher das, zwischen jenen Charakteristiken gefaßte Flächenelement gemeinschaftlich haben.

Aber die Reihe der Charakteristiken einer Umhüllungsfläche werden sich aus eben dem Grunde, weil sie zu zwey und zwey auf einer nemlichen Umhüllten liegen, im Allgemeinen auch, zu zwey und zwey, jedesmal in einer gewissen Zahl von Punkten begegnen. Der Ort dieser Begegnungspunkte ist auf der Umhüllungsfläche eine sichtbare krumme Linie von einem oder mehreren Zweigen, welche in jedem dieser Zweige von einer jeden Charakteristik berührt wird, denn jede Charakteristik hat zwey unendlich nahe liegende Punkte, oder mit andern Worten, ein Linearelement mit demselben gemein.

Diese Linie, obschon sie nicht auf jeder Umhüllungsfläche wirklich erscheint, ist aber da wo sie vorkommt, im Allgemeinen eine nothwendige Folge der Erzeugung, und unabhängig von der Figur der umhüllten Fläche, sie ist eine Rückkehrkante (Art. 102.), die zwey oder mehrere Netze der Umhüllungsfläche von einander trennt.

108. Die einfachste Umhüllungsfläche ist diejenige, welche den, von einer Ebene durchlaufenen Raum begränzt. Diese Fläche ist, wie leicht zu entnehmen, aufwickelbar. Stellen wir uns zum Beyspiel vor, eine bewegliche Ebene solle in jeder ihrer Stellungen normal zu einer gegebenen Linie von doppelter Krümmung seyn.

Wenn wir irgend eine Stellung dieser Ebene betrachten, so wird diese von der unmittelbar nachfolgenden Ebene nach einer geraden Linie geschnitten werden, die zweyte Ebene selbst wird wiederum von der dritten Ebene nach einer von der ersten verschiede-

nen Geraden geschnitten werden; die dritte Ebene wird von der vierten nach einer neuen, von den zwey ersten unterschiedenen Geraden durchschnitten, und so weiter fort. Diese auf einanderfolgenden geraden Durchschnitte sind die Charakteristiken der Umhüllung der beweglichen Ebene. Ueberdies sind alle diese Charakteristiken zu zwey und zwey aufeinanderfolgend betrachtet in einerley Ebene, weil sie die Durchschnitte einer nemlichen umhüllten Ebene sind mit derjenigen, welche ihr unmittelbar vorhergeht und der, welche ihr unmittelbar folgt; daher ist die Umhüllungsfläche, die sie zusammen bilden, aufwickelbar.

Aber außerdem, daß jene Charakteristiken zu zwey und zwey in einer Ebene liegen, können sie in dieser Ebene nicht parallel seyn, weil zwey aufeinanderfolgende Normalebenen einer doppelt gekrümmten Linie im Allgemeinen nicht parallel seyn können. Daher wird jede Charakteristik von den beyden anliegenden in zwey unendlich nahen Punkten geschnitten, der Ort dieser so bestimmten Punkte ist auf der Fläche eine Linie von doppelter Krümmung, welche alle geraden Charakteristiken berührt, es ist die Rückkehrkante der aufwickelbaren Umhüllungsfläche. (Art. 102.)

Im Falle die Kurve, zu welcher die bewegliche Ebene stets normal seyn soll, eben wäre, statt von doppelter Krümmung, so würde die Umhüllung des von jener Ebene durchlaufenen Raumes eine Cylinderfläche werden; denn, da die umhüllte Ebene stets senkrecht auf eine und dieselbe Ebene seyn müßte, auf jene der Kurve nemlich, so wären ihre aufeinanderfolgenden Durchschnitte ebenfalls senkrecht auf diese Ebene und folglich parallel unter sich.

Die Kegelflächen werden durch eine Ebene erzeugt, welche immer durch den Mittelpunkt der Fläche geht, und sich so bewegt, daß sie stets die Tangente zu der Leitlinie des Kegels enthält. Zwey aufeinanderfolgende Ebenen schneiden sich hier nach einer Kante des Kegels.

109. Wir haben (Art. 103.) gesehen, daß drey Bedingungen die Bewegung einer geraden Linie festsetzen, und daß die dadurch entstehende Fläche, im Allgemeinen eine windische sey. Zwey Bedingungen hingegen bestimmen die Erzeugung einer aufwickelbaren Fläche, weil dadurch die Bewegung einer Ebene festgesetzt ist, und jede aufwickelbare Fläche als durch eine bewegliche Ebene hervorgebracht, angesehen werden kann.

Durch zwey gegebene krumme Linien läßt sich daher stets eine aufwickelbare Fläche führen, aber nur eine Einzige. In der That, wir wollen beyde Kurven mit A und B bezeichnen; nachdem man auf der A einen beliebigen Punkt genommen, kann man denselben als Scheitel einer Kegelfläche betrachten, deren Leitlinie die Kurve B ist; jede tangirende Ebene zu dieser Kegelfläche, muß durch eine Tangente zu der Kurve B gehen. Führt man daher durch den, auf der Krummen A genommenen Punkt eine Tangente

zu dieser Linie, und durch die Tangente eine tangirende Ebene zu der Kegelfläche, so geht diese Ebene durch zwey Tangenten, won denen die Eine der Linie A, und die Andere, der Linie B angehört. Indem man den auf der Krummen A genommenen Scheitel verändert, erhält man eine neue Kegelfläche, und eine neue Stellung der tangirenden Ebene zu den Krummen A und B; die Umhüllung des von dieser Ebene durchlaufenen Raumes, ist die aufwickelbare Fläche, welcher auferlegt ward, durch die zwey Krummen A und B zu gehen.

Die Bewegung einer Ebene, welche eine aufwickelbare Fläche erzeugt, läßt sich am Allgemeinsten dadurch bestimmen, daß man der Ebene auferlegt, sich zu bewegen, indem sie stets tangirend bleibt, zu zwey gegebenen krummen Flächen. Man wird irgend eine Stellung dieser Ebene bestimmen, wenn man einen beliebigen Punkt im Raume als gemeinsamen Scheitel zweyer Kegelflächen nimmt, welche um die beyden krummen Flächen umschrieben sind, und diese nach gewissen krummen Linien berühren; eine Ebene, welche diese beyden Kegelflächen tangirt, berührt auch beyde gegebener krummen Flächen, und ist folglich die Gesuchte. Indem man den Scheitel der umschriebenen Kegelflächen verändert, bestimmt man eine weitere Stellung der tangirenden Ebene zu beyden Flächen. Die Umhüllung des von dieser Ebene durchlaufenen Raumes, ist die aufwickelbare Fläche, welche um die beyden gegebenen krummen Flächen umschrieben ist, und dieselben nach zwey krummen Linien berührt. Wären diese Berührungslinien der zwey Flächen mit der Aufwickelbaren bekannt, so könnte man diese Letzte auch konstruiren, indem man ihr auferlegte, durch die zwey Berührungslinien zu gehen.

110. Die Umdrehungsflächen können betrachtet werden, als die Umhüllung eines beweglichen geraden Kegels von kreisförmiger Grundlinie, oder einer Kugel, oder eines geraden Cylinders, welcher als Grundlinie einen Meridian der Fläche hat.

Denken wir uns durch irgend einen Punkt einer Umdrehungsfläche zwey Ebenen; Eine, senkrecht auf die Axe, und die Andere durch die Axe gehend: der Schnitt der ersten Ebene wird ein Parallelkreis und der Schnitt der Zweyten ein Meridian der Fläche seyn. Die Tangente zu dem Meridian an dem Begegnungspunkt der zwey Schnitte trifft die Axe der Fläche in einem Punkt, und wir haben (Art. 82.) gesehen, daß dieser der Mittelpunkt eines geraden Kegels sey, der die Umdrehungsfläche nach dem Parallelkreise berührt. Da man auf diese Art jeden Parallelkreis als die Berührungslinie der Fläche mit einem geraden Kegel betrachten kann, so ist auch jede Umdrehungsfläche als die Umhüllung des Raumes anzusehen, den ein gerader Kegel durchläuft, welcher sich dergestalt verändert, daß seine Grundlinie stets ein Parallelkreis der Umdrehungsfläche ist; seine Erzeugungslinie, die Tangente zu dem Meridian an dem Punkt, in welchem

derselbe die kreisförmige Grundlinie schneidet, und daß sein Mittelpunkt immer in der Umdrehungsaxe liegt. Die aufeinanderfolgenden Durchschnitte dieses beweglichen Kegels sind die Parallelkreise der Umdrehungsfläche.

Eine Kugel, welche als Halbmesser das Stück der Normale zu einem Meridian der Fläche hat, was zwischen dem Meridian und der Axe liegt (Art. 91.), und deren Mittelpunkt der Begegnungspunkt dieser Normalen mit der Axe ist, berührt offenbar die Umdrehungsfläche nach dem Parallelkreis, welcher durch den Fuß der Normalen geht; denn die beyden Flächen haben an allen Punkten dieses Parallelkreises einerley Normalen, und folglich einerley tangirende Ebenen; wenn daher diese Kugel sich so bewegt, daß ihr Mittelpunkt die Umdrehungsaxe durchläuft und ihr Halbmesser immer gleich ist dem Stück der Normalen zwischen ihrem Mittelpunkt und dem Meridian, so bildet die Umdrehungsfläche ihre Umhüllung.

Betrachtet man den Meridianschnitt einer Umdrehungsfläche als Grundlinie eines geraden Cylinders, dessen Kanten senkrecht auf die Ebene des Schnittes sind; so ist jegliche von diesen Kanten Tangente zu einem Parallelkreis der Umdrehungsfläche, und folglich Tangente zu der Fläche selbst: die Berührungspunkte der Tangenten sind die Punkte des Meridianes. Der Cylinder ist daher umschrieben zu der Umdrehungsfläche, und berührt dieselbe nach dem Meridiane. Läßt man den Cylinder sich so bewegen, daß seine Grundlinie nach und nach in alle Meridianebenen übergeht, so ist die Umdrehungsfläche die Umhüllung des von dem Cylinder durchlaufenen Raumes.

111. Die Umhüllung des Raumes, den eine Kugel durchläuft, deren Halbmesser beständig oder veränderlich ist, gehört im Allgemeinen zu der Gattung, welche man **röhrenförmige Flächen** nennt. Wenn der Halbmesser der Kugel beständig ist, und die, von ihrem Mittelpunkt durchlaufene Linie ein Kreis, so ist die Umhüllung derselben eine **ringförmige Fläche**. (Art. 64.)

112. Obgleich die Erzeugung der Umhüllungsflächen sehr abstrakt scheinen mag, so wird sie doch in mehreren technischen Künsten angewendet, und dies hauptsächlich von den Drehern und Blechnern (Klempnern).

Die Letzten wissen eine Tafel Blech um eine Reihe gerader Linien so zu biegen, daß die Ebene der Tafel sich in eine aufwickelbare Fläche verwandelt, von welcher diese Tafel, während der Arbeit, die umhüllte Erzeugungsebene ist.

Die Dreher geben ihren Werken mit einem Instrumente die Vollendung, dessen Schneide eine gerade Linie ist. Wenn sie arbeiten, so beschreibt diese Schneide, in Bezug auf die zu verfertigende Umdrehungsfläche eine umhüllte Kegelfläche derselben, und durch die passende Aenderung der Richtung des Instruments geschieht es, daß die

verschiedenen Zonen der Umhüllten nach und nach mit der auszuführenden Fläche zusammenfließen.

Es ist demzufolge einleuchtend, daß die Uebung den Blechnern und Drehern einige Begriffe von der Erzeugung der Umhüllungen geben müsse; aber was vielleicht überraschend scheinen mag, ist, daß sie einen sehr feinen Takt hierin haben, und daß sie auf den bloßen Anblick einer Oberfläche erkennen, ob sie dieselbe verfertigen können oder nicht.

Nehmen wir an, man habe Modelle von aufwickelbaren Flächen, von Umdrehungsflächen und von windischen Flächen *) zusammengestellt, und man verlange von geschickten Blechnern und Drehern, alle diejenigen herauszunehmen, die sie verfertigen könnten; so wird der Blechner alle aufwickelbaren Flächen zur Seite stellen, der Dreher alle Umdrehungsflächen, und keiner von beyden wird sich mit den windischen befassen.

Nun aber sind die windischen Flächen das Resultat der Bewegung einer Geraden, wie die Aufwickelbaren; woran unterscheidet nun der Blechner die Ersten von den Letzten? An folgendem: bey der windischen Fläche ist die bewegliche Gerade nur eine gewöhnliche Erzeugungslinie, bey der aufwickelbaren Fläche aber ist sie eine Charakteristik, auf einer kleinen, unendlich schmalen Zone gelegen, und diese Zone, welche eine Andeutung von der umhüllten Ebene giebt, zeigt dem Blechner an, daß dieser Umhüllten ein cylindrischer oder kegelförmiger Ambos substituirt werden könne, um darauf eine Tafel Blech so zu biegen, daß sie sich in eine aufwickelbare Fläche verwandle.

Eben so entsteht eine Umdrehungsfläche durch die Bewegung eines Kreises, wie alle Kegel- und Cylinderflächen von elliptischen Grundlinien. **) Aber bey diesen Letzten ist der Kreis nur eine gewöhnliche Erzeugungslinie, bey der Umdrehungsfläche hingegen ist er die Berührungslinie der Umhüllungsfläche mit der Umhüllten, daß heißt, eine Charakteristik. Diese Charakteristik zeigt dem Dreher an, daß wenn er seinen Meissel, in Bezug auf den zu drehenden Körper gerade Kegelflächen beschreiben läßt, dieser Meissel, mit Gewandheit geführt, ihre Umhüllung hervorbringen werde, und daß er folglich zur Verfertigung aller möglichen Umdrehungsflächen dienen könne, während er zur Verfertigung aufwickelbarer Flächen, die nicht zugleich durch Umdrehung erzeugt werden können, nicht zu gebrauchen ist.

---

*) Vorausgesetzt, daß unter diesen Modellen keine seyen, welche entweder windisch oder aufwickelbar und zugleich durch Umdrehung entstanden seyen.

**) Alle Kegel- und Cylinderflächen von elliptischen Grundlinien können durch zwey Systeme paralleler Ebenen, nach Kreisen geschnitten werden. (Siehe Art. 126.)

Von den Flächen der zweyten Ordnung.

113. Unter Flächen der zweyten Ordnung oder des zweyten Grads begreift man diejenigen, welche, wenn sie von einer Ebene geschnitten werden, immer eine Kurve der zweyten Ordnung hervorbringen. Sie haben, wie diese, die Eigenthümlichkeit von einer Geraden in nicht mehr als zwey Punkten getroffen zu werden.

Die Eigenschaften der Flächen der zweyten Ordnung lassen sich nur durch die Anwendung der Algebra auf die Geometrie herleiten, woher auch die Benennung "Fläche vom zweyten Grad" gezogen ist, oder durch rein geometrische Theorien, welche aber durchaus außer den Gränzen dieses Lehrbuches liegen. *) Jedoch wegen der häufigen Anwendung, welche diese Fläche in den graphischen Künsten finden; ist es unerläßlich, wenn auch nicht die Eigenschaften derselben, doch wenigstens ihre Gestalt und Erzeugung zu kennen; und diese wollen wir in den nachfolgenden Paragraphen auseinandersetzen.

114. Der Kegel von kreisförmiger Grundlinie kann, wie bekannt, von einer Ebenen nach den drey krummen Linien vom zweyten Grad, der Ellipse, der Parabel und der Hyperbel geschnitten werden. (Art. 262 et seq.) Diese drey Kurven sind symeterisch, **) in Beziehung auf zwey unter sich senkrechte Gerade, welche man Haupt-Axen des Kegelschnittes nennt; sie haben Scheitel und diese Scheitel sind die Begegnungspunkte der Linie mit ihren Haupt-Axen.

Wir setzen als bekannt voraus, daß man diese Kurven mittelst ihrer Haupt-Axen zu zeichnen verstehe. (Diejenigen, welche diese Vorkenntnisse noch nicht besitzen sollten, finden in dem §. 1. des Anhanges eine kurzgefaßte Darstellung der Konstruktion und der vorzüglichsten Eigenschaften der Kegelschnittslinien.)

115. Man denke sich durch irgend einen Punkt des Raumes drey unter sich senkrechte Geraden, und, um unsere Vorstellung zu fixiren, wollen wir annehmen, zwey von diesen Geraden wären in einer Horizontalebene und die Dritte folglich vertikal. Denken wir uns sofort diesen gemeinschaftlichen Punkt der drey Geraden als Mittelpunkt dreyer

*) Man sehe hierüber Poncelet'ts Traité des propriétés projectives des figures. (Siehe die Vorrede.)

**) Zwey ebene Figuren, oder auch zwey Theile einer solchen Figur sind symetrisch, wenn ihre korrespondirenden Punkte auf Parallelen liegen, die sämmtlich von einer nemlichen Senkrechten, der Axe der Symetrie, durch ihre Mitten geschnitten werden. — Zwey Körper sind symetrisch von Gestalt und Stellung, wenn die korrespondirenden Punkte der Beyden durch parallele Gerade verbunden werden können, deren Mitten in einer nemlichen auf dieselben senkrechten Ebene liegen, welche die Ebene der Symetrie heißt.

Kugeln von den Halbmessern a, b, c; diese Kugeln werden die drey Geraden in sechs Punkten schneiden, so, daß die zwey Punkte, welche auf einer nemlichen Geraden liegen, um die Abstände 2 a, 2 b, 2 c, von einander entfernt sind.

Dieses festgesetzt, so konstruire man zwey Ellipsen, welche, als gemeinschaftlichen Mittelpunkt, den Durchschnitt der senkrechten Geraden haben, und von denen die Eine als Haupt-Axen die zwey Geraden 2 a und 2 b hat, und die Andere, die zwey Geraden 2 a, 2 c. Nachdem man durch die Gerade 2 c eine Reihe von Ebenen geführt hat, von denen jegliche die Ebene der ersten Ellipse nach einer, durch den Mittelpunkt gehenden Geraden schneidet, konstruire man über diesen zwey Geraden, als Haupt-Axen, eine neue Ellipse. Diese Reihe von Ellipsen, welche als gemeinschaftliche Axe die Gerade 2c haben, gehört einer Fläche vom zweyten Grad, welche man Ellipsoid nennt.

Wenn man sich eine Reihe von Hyperbeln denkt, welche die Gerade 2 c als eingebildete Axe gemein haben, und als Scheitel die Punkte der Ellipse, welche über den Geraden 2 a, 2 b, als Axen konstruirt ist; so gehört diese Reihe von Hyperbeln einer Fläche vom zweyten Grad, welche Hyperboloid von einem Netze genennt wird. Die Ellipse, deren Axen 2 a, 2 b sind, bildet die Kehle des Hyperboloids von einem Netz. Diese Fläche besteht aus zwey gleichen Theilen, welche nach jener Kehllinie tangirend in einander laufen, und sich von da an, auf und abwärts ins Unendliche ausdehnen.

Man substituire der Ellipse, welche als Axen, die Geraden 2 a, 2 b hat eine, über denselben Axen konstruirte Hyperbel, deren reelle Scheitel an den Endpunkten der Geraden 2 a liegen. Durch die Gerade 2 c führe man eine Reihe von Ebenen, von denen jede die Ebene der Hyperbel nach einer Geraden schneidet, das Stück dieser Geraden, was zwischen den beyden Zweigen der Hyperbel gefaßt ist, nehme man als reelle Axe einer neuen Hyperbel, welche als zweyte oder eingebildete Axe die Gerade 2 c hat. Die Reihe dieser neuen Hyperbeln gehören einer dritten Fläche vom zweyten Grad, welche Hyperboloid von zwey Netzen heißt.

116. Die drey Geraden 2 a, 2 b, 2 c sind die Haupt-Axen der Flächen der zweyten Ordnung; ihr gemeinschaftlicher Durchschnittspunkt ist der Mittelpunkt der Fläche. *) Die Begegnungspunkte der Fläche mit ihren Axen sind die Scheitel derselben. Bey dem Ellipsoid sind die sechs Scheitel reell; bey dem Hyperboloid von einem Netz

*) Dieser Mittelpunkt hat die Eigenschaft, daß er alle durch denselben geführten Sehnen der Fläche in zwey gleiche Theile theilt, Sehne einer Fläche nennt man nemlich das Stück einer Geraden, welche die Fläche in zwey Punkten schneidet, was zwischen diesen Durchschnittspunkten gefaßt ist.

beschränkt sich die Zahl der reellen Scheitel auf vier, und auf zwey bey dem Hyperboloid von zwey Netzen. Man nennt die Schnitte der drey Ebenen, welche durch zwey und zwey Axen gehen die Haupt-Schnitte der Fläche.

Zwey andere Flächen vom zweyten Grad, welchen man die Benennung elliptisches Paraboloid und hyperbolisches Paraboloid gegeben hat, haben keinen Mittelpunkt oder ihr Mittelpunkt liegt vielmehr im Unendlichen, und sie haben nur einen einzigen reellen Scheitel.

117. Denken wir uns zwey, unter sich senkrechte Ebenen, und in denselben zwey Parabeln, deren große Axen in dem Durchschnitt der Ebenen liegen, und welche als gemeinsamen Scheitel einen Punkt dieses Durchschnitts haben. Nehmen wir überdies die Parabeln von verschiedener Weite an, und lassen wir, während die eine Parabel fest bleibt, die andere sich so bewegen, daß ihre Ebenen immer senkrecht sind, und daß der Scheitel der beweglichen Parabel beständig auf der Festen bleibe. Durch diese Bewegung wird die mobile Parabel, wenn sie nach derselben Richtung divergirt, wie die feste Parabel, das elliptische Paraboloid erzeugen, und wenn sie nach entgegengesetzter Richtung divergirt, so erzeugt sie das hyperbolische Paraboloid.

118. Alle Flächen der zweyten Ordnung reduziren sich auf die fünf Folgenden: das Ellipsoid, das Hyperboloid von einem Netz, das Hyperboloid von zwey Netzen, das elliptische Paraboloid und das hyperbolische Paraboloid. Die beständigen Größen, welche diese fünf Flächenarten bestimmen, können unter sich gewisse Vehältnisse haben, welche dieselben in andere Flächen vom zweyten Grad umgestalten als die Kugel, den Kegel und den Cylinder, deren Grundlinien die drey Kegelsschnittslinien sind ꝛc. Wenn von den drey Axen 2 a, 2 b, 2 c des Ellipsoids zwey gleich werden, so verwandelt sich dasselbe in eine Umdrehungsfläche, und es hat als Umdrehungsaxe diejenige von den dreyen, welche keine gleiche hat. Werden alle drey Axen des Ellipsoids einander gleich, so wird diese Fläche eine Kugel.

Das Hyperboloid von einem Netz verwandelt sich in eine Umdrehungsfläche, wenn die Axen 2 a, 2 b des elliptischen Haupt-Schnittes gleich werden; so daß diese Ellipse ein Kreis wird; die Gerade 2 c ist sodann die Umdrehungsaxe. Auch das Hyperboloid von zwey Netzen, und das elliptische Paraboloid können Umdrehungsflächen werden. Die erstere Fläche wird sodann erzeugt, durch die Umdrehung einer Hyperbel um ihre reelle Axe, und die Zweyte, durch die Umdrehung einer Parabel um ihre große Axe.

119. Das Hyperboloid von einem Netze hat die Eigenschaft, durch die gerade Linie erzeugt werden zu können; und zwar auf zwey verschiedene Weisen, so daß man durch jeden Punkt dieser Fläche zwey Gerade ziehen kann, die mit allen ihren Punkten

der Fläche angehören. Wenn eine bewegliche Gerade sich auf drey festen Geraden als Leitlinien bewegt, so ist die Fläche, die sie erzeugt, ein Hyperboloid von einem Netz: und wenn man drey beliebige Stellungen der Erzeugungslinie als die Leitlinien einer neuen beweglichen Geraden nimmt, so erzeugt diese Letztere durch ihre Bewegung abermals dasselbe Hyperboloid.

Es sey I K, (Taf. XII. Fig. 6.) eine Gerade, welche sich bewegt, indem sie sich beständig auf drey im Raume gegebene Gerade A B, M N, C D stützt, und diese Geraden in den Punkten I, G, K schneidet. Es seyen ferner A M D, B N C zwey andere Stellungen der beweglichen Geraden. Wenn eine zweyte bewegliche Gerade sich auf den drey als fest angenommenen Geraden A M D, I G K, B N C als Leitlinien bewegt, so bringen die beyden Bewegungen nur eine und dieselbe Fläche hervor. *)

Diese Eigenschaft des Hyperboloids von einem Netze ist für die darstellende Geometrie die merkwürdigste, weil sie, wie wir im nächsten Kapitel sehen werden, auf eine einfache Weise zur Konstruktion der tangirenden Ebenen zu den windischen Flächen führt.

120. Wenn die beyden reellen Axen 2 a, 2 b des Hyperboloids von einem Netze gleich werden, das heißt, wenn sich dasselbe in eine Umdrehungsfläche verwandelt, so kann diese Fläche auch durch eine Gerade erzeugt werden, die mit der Axe 2 c nicht in einer Ebene liegt, und sich um dieselbe als Rotationsaxe dreht.

Geht man von dieser, durch die Analisis bewiesenen Eigenschaft des Umdrehungshyperboloids von einem Netze aus, so läßt sich auch bey dieser Fläche die Eigenschaft der doppelten Erzeugung durch die gerade Linie geometrisch darthun.

121. Es sey (A, *a a'*) (Taf. IX.) eine vertikale Gerade, sie stelle die Axe 2 c des Hyperboloids vor, (R Q, *r q*) sey eine zweyte Gerade, welche durch ihre Umdrehung um die Erste ein Umdrehungshyperboloid von einem Netze erzeugt. Die aus dem Punkt A auf die Gerade R Q gefällte Senkrechte A T, ist die Horizontalprojektion der kürzesten Entfernung der zwey Geraden (A, *a a'*), (R Q, *r q*). Der Fußpunkt (T, *t*) dieser Senkrechten auf der Erzeugungslinie (R Q, *r q*) beschreibt bey der Umdrehung dieser Letzten den kleinsten Parallelkreis der Fläche, welchen wir aus diesem Grunde den Kehlkreis nennen (Art. 115.). Jeder andere Punkt der Erzeugungslinie, beschreibt

*) Der Beweis für die Identität der auf beyde Arten erzeugten Flächen läßt sich rein geometrisch nur auf eine weitläufige Art führen.

Wir haben denjenigen, den Hachette in seinen Elements de Géométrie à trois dimensions beybringt, und welcher sich auf einen Artikel von Chasles in der Correspondance sur l'école polytechnique gründet, in der Note II. zu Ende dieses Buches angefügt.

einen größeren Parallelkreis, wie zum Beyspiel der Punkt (R, *r*) auf der Horizontalebene den Kreis. (R U Q V, *e f*).

Wenn man durch die Axe irgend eine Meridianebene A M führt, so schneidet diese die Erzeugungslinie (R Q, *r q*) in einen Punkt (M, *m*) und man kann sich eine zweyte Gerade (V U, *v u*) denken, welche symetrisch mit der (R Q, *r q*) gestellt ist, in Bezug auf die Ebene A M. Diese zweyte Gerade wird die Horizontalebene in einem Punkt U des Kreises (R U Q V, *e f*) treffen, so daß die Gerade R U senkrecht auf A M ist, und sie wird die Ebene A M in dem nemlichen Punkt (M, *m*) wie die Gerade (R Q, *r q*) durchschneiden. Lassen wir die beyden Geraden (R Q, *r q*), (V U, *v u*) eine gleich große Drehung um die Axe machen, indem sie sich gleichmäßig der Ebene A M nähern, oder von ihr entfernen; so bleibt diese letzte immer ihre Ebene der Symetrie, sie werden sich immer in einen Punkt derselben Ebene schneiden, und wenn beyde Geraden eine ganze Umdrehung vollendet haben, so wird die Reihe ihrer Durchschnittspunkte auf der Ebene A M eine Linie bilden, welche nichts anderes ist, als der Meridian der Fläche. Wenn man daher die Meridianebene sammt den zwey Geraden sich zu gleicher Zeit um die Axe drehen läßt, so werden sie nur eine und dieselbe Umdrehungsfläche beschreiben.

Das Umdrehungshyperboloid von einem Netz kann daher auf doppelte Art durch die gerade Linie erzeugt werden, die geraden Erzeugungslinien eines Systems begegnen sich nicht, aber sie werden Alle durch irgend eine Gerade des andern Systems geschnitten. Da nun durch drey Leitlinien die Bewegung einer Geraden festgesetzt wird, so ist zufolge dieser Eigenthümlichkeit einleuchtend, daß je drey, einem nemlichen Erzeugungssystem angehörigen Geraden des Umdrehungshyperboloids genommen werden können, um als Leitlinien einer Geraden zu dienen, welche durch ihre Bewegung auf jenen Geraden, dieselbe Fläche erzeugen wird.

In allen ihren Stellungen sind die Geraden (R Q, *r q*), (V U, *v u*) tangirend zu einem geraden Cylinder, welcher als Axe die Vertikale (A, *a a'*) hat, und als Basis den Kehlkreis (T C D, *c d*), dessen Halbmesser die kürzeste Entfernung einer geraden Erzeugungslinie von der Axe ist. Alle Geraden der Fläche haben die gleiche Neigung gegen die Axe, und der Winkel, den sie mit der Horizontalebene machen, ist beständig.

122. Wenn man die drey geraden Leitlinien des Hyperboloids von einem Netze parallel zu einer und derselben Ebene annimmt, so bleibt die, auf diese drey Geraden sich stützende gerade Erzeugungslinie der Fläche immer parallel zu einer andern Ebene, und das Hyperboloid von einem Netze verwandelt sich in ein hyperbolisches Paraboloid. Diese letzte Fläche wird auch durch eine Gerade erzeugt, die sich bey ihrer Bewegung

auf zwey gerade Leitlinien stützt und dabey beständig parallel zu einer gegebenen Ebene bleibt.

Wenn man von dieser Erklärung des hyperbolischen Paraboloids ausgeht, so läßt sich beweisen, daß diese Fläche noch auf eine zweyte Art durch eine Gerade erzeugt werden kann, wenn sich nemlich diese neue Erzeugungslinie auf zwey beliebige Erzeugungslinien des ersten Systems, als Leitlinien stützt, und dabey parallel zu der Ebene der zwey ersten Leitlinien bleibt.

123. Es seyen A C, A″ C″, (Taf. XII. Fig. 5) zwey gegebene Leitlinien des Paraboloids; A A″, C C″ seyen zwey Erzeugungslinien, welche die gegebenen Leitlinien in den Punkten A und A″, C und C″ schneiden. Durch die Geraden C C″ und A″ C″ denke man sich eine Ebene geführt, und diese sey als Projektionsebene angenommen.

Die Ebenen, welche durch die Gerade A A″ parallel zu der C C″, und durch die Gerade C A parallel zu der C″ A″ geführt sind, schneiden sich nach einer Geraden A a, und ihre Risse auf der Projektionsebene schließen mit jenen obigen Geraden ein Parallelogramm C a A″ C″ ein.

Eine zu den zwey Erzeugungslinien A A″, C C″ parallele Ebene hat als Riß eine Parallele zu A″ a, wie B″ b: sie schneidet die gegebenen Erzeugungslinien in zwey Punkten B, B″, welche Punkte die Stellung einer dritten Erzeugungslinie B B″ bestimmen; und sie trennt von dem Dreyecke A C a ein ähnliches Dreyeck B C b.

Wir werden beweisen, daß, wenn man durch irgend einen Punkt B′ der Geraden B B″ eine Ebene parallel zu der Ebene a C A führt, diese Ebene das Paraboloid ebenfalls nach einer geraden Linie schneide.

Der Riß C′ a' dieser genannten Ebene muß parallel zu C a seyn, und sie wird die zwey parallelen Ebenen A A″ a, B B″ b nach den zu A a parallelen Geraden A′ a', B′ b' durchschneiden. A′ und C′ sind die Punkte, in denen dieselbe Ebene die Geraden A A″, C C″ trifft, und ich sage, daß die drey Punkte A′, B′, C′ in gerader Linie liegen.

In der That, die Ebene C a' A′ schneidet von den drey Dreyecken A″A a, B″ B b, C A a wechselseitig ähnliche Dreyecke ab, welche folgende Proportionen geben:

$$A\,a : A'\,a' :: A''\,a : A''\,a' :: B''\,b : B''\,b : B''\,b' : B\,b : B'\,b',$$

oder wenn man die mittlere Verhältnisse ausschließt.

$$A\,a : B\,b :: A'\,a' : B'\,b'.$$

Man hat daher

$$\frac{\text{A}\ a}{\text{B}\ b} = \frac{\text{A}'\ a'}{\text{B}'\ b'} = \frac{\text{C}\ a}{\text{C}\ b} = \frac{\text{C}'\ a'}{\text{C}'\ c'}$$

und folglich liegen die drey Punkte A′, B′, C′ in gerader Linie.

Es ergiebt sich hieraus, daß das hyperbolische Paraboloid nach zwey verschiedenen Weisen durch die gerade Linie erzeugt werden kann, einmal, indem die Erzeugungslinie sich auf zwey feste Gerade als Leitlinien lehnt und dabey parallel zu einer gegebenen Ebene bleibt; und zweytens, indem man zwey beliebige Erzeugungslinien jenes ersten Systems als feste Leitlinien nimmt, wobey die bewegliche Gerade immer parallel bleibt, zu der Ebene der zwey Leitlinien des ersten Systems. Beyde Erzeugungsarten ergeben sich, wie man sieht, Eine aus der Andern auf durchaus gleiche Weise.

124. Das Hyperboloid von einem Netze, das Umdrehungshyperboloid von einem Netze und das hyperbolische Paraboloid gehören, wie aus ihrer Erzeugungsart durch die gerade Linie hervorgeht zu den windischen Flächen, und sie sind die einfachsten dieses Geschlechtes. Alle drey können auf doppelte Art durch die Gerade erzeugt werden. Die zwey Systeme der geraden Erzeugungslinien theilen diese Flächen in eine unendliche Anzahl kleiner windischer Vierecke, und die Flächenstückchen, welche zwischen zwey aufeinanderfolgenden Erzeugungslinien eines nemlichen Systems gefaßt sind, sind windische Elemente, die sich nach der Richtung der Geraden, von denen sie eingeschlossen werden, ins Unendliche ausdehnen.

125. Das Hyperboloid von einem Netz wird ein gerader Kegel von elliptischer Grundlinie, wenn die, auf den beyden Axen 2 a, 2 b (Art. 115.) konstruirte Ellipse sich auf einen Punkt reduzirt, während die dritte Axe 2 c unendlich groß wird.

Dieser Kegel ist die einfachste Fläche vom zweyten Grad, welche durch eine Ebene nach den drey Kurven vom zweyten Grad, der Ellipse, der Parabel und der Hyperbel geschnitten werden kann; er besitzt so wie alle übrigen Flächen vom zweyten Grad die Eigenschaft, durch zwey Reihen verschiedentlich geneigter Ebenen nach Kreisen geschnitten werden zu können, wobey übrigens bemerkt werden muß, daß bey dem hyperbolischen Paraboloid die Kreise von unendlichem Halbmesser sind, und mit den Geraden der Fläche zusammenfallen. Nimmt man bey dem elliptischen Kegel einen dieser Kreise für seine Grundlinie, so geht die aus dem Mittelpunkt der Fläche auf die Ebene des Kreises gefällte Senkrechte nicht durch den Mittelpunkt desselben, und aus diesem Grunde nennt man ihn schiefen Kegel. (Art. 61.) Siehe Note III.

126. Unter den Eigenschaften der Flächen vom zweyten Grad ist diejenige für die zeichnenden Künste besonders bemerkenswerth, daß alle Schnitte dieser Flächen durch parallele

Ebenen ähnlich sind. Die Kegel und Cylinder des zweyten Grads, haben diese Eigenschaft mit allen übrigen Kegeln und Cylindern gemein. Siehe Note I.

* * *

127. Indem wir somit diese Kapitel über die Gestalt und die Erzeugung der krummen Flächen schließen, müssen wir in einige nothwendige Erörterungen in Bezug auf die Projektionszeichnungen eingehen, wozu wir bis jetzt noch keine Gelegenheit fanden.

Im Allgemeinen haben alle krummen Flächen, wie vervielfältigt auch ihre Netze seyn mögen, doch immer nach einer gewissen Richtung eine endliche und umgränzte Ausdehnung. Der Umfang ihrer Projektionen wird daher im Allgemeinen ebenfalls ganz oder theilweise durch eine gewisse krumme Linie eingeschlossen, welche wir die Begränzungslinie der Projektion der Fläche nennen. Bey der Kugel ist dies eine Kreislinie, bey den Cylindern und Kegeln gewöhnlich das System zweyer Geraden u. s. w. Diese Begränzungslinie ist aber nichts anderes als die Basis einer Cylinderfläche, deren Kanten senkrecht auf die Projektionsebene sind, und welche die projektirte Fläche nach einer gewissen krummen Linie berührt, von welcher jene Basis des Cylinders selbst die Projektion ist.

Da wir nun (Art. 25.) die Stellung des Auges als in unendlicher Entfernung von der Projektionsebene angenommen haben, so, daß alle Sehestrahlen parallel unter sich sind und senkrecht auf die Projektionsebene, so ist zufolge dieser Annahme einleuchtend, daß die genannte Berührungslinie des umhüllenden Cylinders mit der projektirten Fläche, diese in zwey Theile theile, wovon der, gegen das Auge gewendete mit allen auf demselben verzeichneten Linien gesehen sey, der übrige Theil hingegen durch diesen bedeckt erscheine.

Denken wir uns nun auf der Fläche irgend eine krumme Linie verzeichnet, welche die Berührungslinie derselben mit dem umschriebenen Cylinder in einem Punkte schneidet; so sind die Tangenten zu den beyden Linien an jenem Punkt, in einer und derselben tangirenden Ebene enthalten. In dieser nemlichen Ebene muß aber auch die durch denselben Punkt gehende Kante des umschriebenen Cylinders enthalten seyn, weil diese eine Tangente zu der Fläche ist; die tangirende Ebene ist daher senkrecht auf die Projektionsebene und die Projektionen der in ihr enthaltenen zwey Tangenten fallen in eine einzige Gerade zusammen, welche selbst die unbestimmte Projektion der tangirenden Ebene ist. Die Projektionen der zwey auf der Fläche gezogenen Linien berühren sich daher in einem Punkte, welcher die Projektion ihres Durchschnittspunks auf der Fläche ist.

128. Aus allem oben Gesagten ziehen wir folgende Sätze als Resultate:

I. Die Begränzungslinie, welche den Umfang der Projektion einer krummen Fläche bestimmt, berührt die Projektionen aller auf der Fläche verzeichneten Linien, wenn nemlich die Ausdehnung derselben so groß ist, daß sie auf die Fläche jene Linie durchschneiden, oder berühren, deren Projektion die genannte Begränzungslinie ist.

II. Wenn eine durch ihre Projektionen dargestellte krumme Fläche allein im Raume vorhanden ist, so daß keiner ihrer Theile durch eine andere Fläche bedeckt erscheint, so sind die Berührungspunkte der Begränzungslinie der Projektion der Fläche mit den Projektionen alle auf der Fläche verzeichneten Linien zugleich auch die Trennungspunkte der gesehenen und bedeckten Theile dieser letztgenannten Linien.

129. Von diesen beyden Sätzen findet besonders der Erste eine stete Anwendung bey der Konstruktion der Durchschnitte krummer Flächen; und überhaupt bey jeder geometrischen Zeichnung, auf welcher krumme Flächen dargestellt werden; und obgleich Nichts mehr der Klarheit einer solchen Darstellung schadet als ein Verstoß gegen denselben, so werden doch dergleichen Fehler nur zu häufig von Zeichnern begangen, die unbekannt sind mit den Methoden der darstellenden Geometrie.

Wir werden bey Gelegenheit einiger Aufgaben des dritten Buches. (Art. 315- 323) zwar auf eine Ausnahme von dieser allgemeinen Regel treffen, diese Ausnahme jedoch daselbst deutlich erklärt finden.

Das Umgekehrte des ersten Satzes läßt sich anwenden, um die Begränzungslinie der Projektion irgend einer krummen Fläche zu finden; denn wenn man die Projektionen einer hinlänglichen Zahl von Erzeugungslinien der Fläche konstruirt hat, und man zieht an diese sämmtlichen Projektionen eine berührende krumme Linie, so ist diese offenbar die verlangte Begränzungslinie. Dieses Verfahren erfodert übrigens, um genau zu seyn, daß man eine ziemlich große Anzahl von Projektionen der Erzeugungslinie bestimme, denn nur mit einer sehr geübten Hand läßt sich eine krumme Linie, die durch die alleinige Bedingung gegeben ist, eine gewisse Anzahl anderer in einer Ebene gegebener Kurven zu berühren, mit hinlänglicher Genauigkeit ziehen.

Was den zweyten Satz betrifft, so giebt derselbe eine sichere Regel, wie die gesehenen und bedeckten Theile einer durch ihre Projektionen dargestellten krummen Fläche zu unterscheiden seyen, durch welche Unterscheidung eine Projektionszeichnung erst den großen Vorzug erhält, ein Bild zu machen. Es ist jedoch leicht zu ersehen, daß diese Regel nur dann ihre Anwendung finden könne, wenn die vorgestellte Fläche durch Nichts an-

deres bedeckt erscheint, als durch ihre eigenen Theile, denn im andern Falle läßt sich durchaus keine allgemein gültige Regel geben. Die Lösung der Aufgabe hängt alsdann ganz davon ab, daß man sich eine deutliche Anschauung von der gegenseitigen Stellung der sich bedeckenden Flächen erwerbe. Wir verweisen hier auf das, was wir bereits über diesen Gegenstand (Art. 28 — 29.) gesagt haben.

Die einzelnen Fälle werden, nach Allem diesem, aus den beygefügten Zeichnungen selbst deutlich hervorgehen, und zur Norm bey andern ähnlichen dienen können.

Viertes Kapitel.

Von den tangirenden Ebenen zu den aufwickelbaren und den windischen Flächen.

130. Wie wir im vorhergehenden Kapitel gesehen haben, kann jede aufwickelbare Fläche als die Umhüllung des von einer beweglichen Ebene durchlaufenen Raumes betrachtet werden; sie berührt die verschiedenen Stellungen der erzeugenden Ebene nach geraden Charakteristiken, welches gewöhnlich die Erzeugungslinien der aufwickelbaren Fläche sind.

Die tangirende Ebene an einem gegebenen Punkte einer aufwickelbaren Fläche fällt mit der entsprechenden Stellung der umhüllten Erzeugungsebene zusammen; sie berührt daher die Fläche in der ganzen Länge der geraden Erzeugungslinie des Berührungspunktes, und ihre Stellung ist bestimmt; durch diese Gerade, und durch die Tangente zu irgend einer Kurve der Fläche an dem Punkte, wo sie dieselbe Erzeugungslinie durchschneidet.

* * *

131. Die windischen Flächen werden durch die Bewegung einer geraden Linie erzeugt, weßhalb die tangirende Ebene an irgend einem Punkt einer solchen Fläche auch die gerade Erzeugungslinie enthalten muß, welche durch den Berührungspunkt geht. Diese Ebene berührt aber die windische Fläche nur in jenem einzigen Punkte, während bey allen aufwickelben Flächen, die ebenfalls durch die gerade Linie erzeugt sind, die Berührung längs der ganzen Ausdehnung einer geraden Linie statt findet. Aber diese letzte Eigenthümlichkeit gehört ausschließlich nur den aufwickelbaren Flächen; bey allen Andern beschränkt sich die Berührung mit ihren tangirenden Ebenen auf einen oder mehrere

Punkte, jedoch immer auf eine begränzte Anzahl. Welchen Punkt der geraden Erzeugungslinie einer windischen Fläche man demnach als Berührungspunkt nehmen mag, so wird die tangirende Ebene an diesem Punkt zwar immer durch die nemliche Erzeugungslinie gehen, aber einem jeden Punkt entspricht eine andere Neigung der Ebene. Es folgt aus diesem, daß im Allgemeinen jede Ebene, die durch eine Gerade einer windischen Fläche geht, zugleich auch an irgend einem Punkt dieser Gerade tangirend zu der Fläche sey.

In der That, benennen wir mit G eine gerade Erzeugungslinie einer windischen Fläche und mit P eine durch dieselbe Gerade geführte Ebene. Bezeichnen wir ferner mit G', G'', G''' ..., eine Reihe von Erzeugungslinien jenseits der Geraden G, und mit ... $'G$, $''G$, $'''G$, eine Reihe derselben Geraden diesseits der Geraden G, und nehmen wir überdem an, alle diese geraden Erzeugungslinien seyen aufeinanderfolgend und in der Ordnung ... $'''G$, $''G$, $'G$, G, G', G'', G''' ....., wie sie durch die Oberstriche angegeben ist. Wenn nicht in einigen besondern Fällen, wird die Ebene P im Allgemeinen zu keiner von jenen Geraden parallel seyn, sie wird dieselben in einer Reihe von Punkte ... $'''g$, $''g$, $'g$ .... g', g'', g''' ... schneiden, und diese Punkte, die einander unendlich nahe liegen, bilden eine einzige ebene krumme Linie. Nun aber liegen die zwey Punkten $'g$, g' auf den beyden entgegengesetzten Seiten der Geraden G, daher wird das unendlich kleine Stück $'g$ $'g$ der genannten Krummen die Gerade G in einem Punkte schneiden. Dieser Punkt, den wir g nennen wollen, ist offenbar der Berührungspunkt der Ebene P mit der windischen Fläche. Denn eine Ebene ist tangirend zu einer Fläche, wenn sie durch die Tangenten zu zwey verschiedenen Linien der Fläche geht, die sich in dem Berührungspunkt kreuzen; nun aber liegt die Krumme ...$'''g$ $''g$ $'g$ g g' g'' g'''... in der Ebene P; diese Ebene enthält daher die Tangente in g zu der Krummen, aber sie enthält auch die Gerade G, welche ihre eigene Tangente ist, sie ist folglich tangirend zu der windischen Fläche an dem Durchschnittspunkt g der zwey genannten Linien.

Es folgt aus dem Vorhergehenden, daß eine tangirende Ebene zu einer windischen Fläche zugleich auch durchschneidend zu der Fläche sey; daß sie dieselbe nach einer geraden Erzeugungslinie nach einer gewissen Krummen schneide, und daß diese beyden Linien sich in dem Berührungspunkte kreuzen. Wenn die Ebene sich um die gerade Erzeugungslinie dreht, so hört sie nicht auf tangirend zu der windischen Fläche zu seyn, aber der Berührungspunkt wechselt auf der Erzeugungslinie mit der veränderten Stellung der Ebene, weil sich mit dieser Stellung die Krumme ..$'''g$ $''g$ $'g$ g g' g'' g'''... ändert, und folglich der Punkt g.

132. Die Bestimmung des Berührungspunkts einer windischen Fläche mit einer Ebe-

ne, die durch eine ihrer geraden Erzeugungslinien geführt ist, hängt sonach von der Konstruktion der Durchschnittslinie der Fläche und der Ebene ab. Sobald die Erzeugung der windischen Fläche bestimmt und bekannt ist, kann man so viele Punkte $\ldots{}'''g, {}''g, {}'g \ldots g', g'', g''' \ldots$ der zwey Reihen als man will konstruiren, indem man sich stets der Geraden G nähert. Die zwey Theile der Krummen, welche aus den zwey Reihen von Punkten gebildet sind, werden sich immer mehr in dem Punkt g der Geraden G zu vereinigen suchen; nichts destoweniger aber bleiben sie in der Nähe der Geraden G stets getrennt, weil der Punkt g, auf welchen sie zulaufen, selbst unbestimmt ist. Ein geübter Zeichner wird übrigens diese Linie mit hinreichender Genauigkeit ziehen, indem er dem Gesetze der Stetigkeit entspricht, und dabey berücksichtigt, daß zwey Stücke einer geometrischen Linie in dem Punkt, in welchem sie aneinanderstoßen, eine gemeinschaftliche Tangente haben müssen.

Wir werden nun die Auflösung der umgekehrten Aufgabe, das heißt, bey gegebenem Berührungspunkt einer windischen Fläche, die Stellung der tangirenden Ebene an diesem Punkt, zu konstruiren, zuerst für die windischen Flächen des zweyten Grads vortragen, weil sich die Auflösung des nemlichen Problems, bey allen übrigen windischen Flächen, wie wir sehen werden, immer auf diese zurückbringen läßt.

Fortsetzung der Aufgaben über die Konstruktion der tangirenden Ebenen zu den krummen Flächen, wobey der Berührungspunkt gegeben ist.

Sechste Aufgabe.

Durch einen gegebenen Punkt eines Umdrehungs-Hyperboloids von einem Netz, was durch seine Axe und eine gerade Erzeugungslinie gegeben ist, eine tangirende Ebene zu führen?

133. Auflösung. Es sey (A, $a\,a'$) Taf. IX. die Axe der Fläche; (O G, $o\,g$) eine gerade Erzeugungslinie derselben. Wir nehmen an, man habe (nach Art. 121) den kleinsten Kehlkreis (C D T, $c\,d$) der Fläche konstruirt, nnd den Parallelkreis (G R E F, $e\,f$), welcher durch den Punkt (G, g) der Erzeugungslinie auf der Horizontalebene beschrieben wird.

Endlich sey M die gegebene Horizontalprojektion des Berührungspunkts, dessen Vertikalprojektion noch zu bestimmen bleibt.

Alle geraden Erzeugungslinien des Hyperboloids sind tangirend zu dem geraden Cylinder, dessen Grundlinie der Kreis (C D T, $c\,d$) und dessen Axe die Gerade (A, $a\,a'$)

ist, (Art. 112.), man ziehe daher durch M eine Gerade M S, welche den Kreis C D T in einem Punkte S berührt. Diese Gerade betrachte man als unbestimmte Projektion einer den vertikalen Cylinder C D T berührenden Ebene, welche zwey Erzeugungslinien des Hyperboloids enthält, die symetrisch gestellt sind, in Bezug auf Meridianebene A F (Art. 121.) Von diesen Geraden schneidet Eine die Horizontalebene in U, und die Andere, in V; sie kreuzen sich beyde in einem Punkte (S, *s*) des Kehlkreises und ihre Vertikalprojektionen sind folglich die Geraden *u s*, *v s*. Nun aber kann jede von diesen Geraden die Vertikalprojektion des Berührungspunkts enthalten, daher liegt diese Projektion auf der Vertikalen M *m m'* in *m* oder *m'*, in gleichen Abständen von der Horizontalen *c d*.

Da sich durch den Punkt M noch eine zweyte Tangente M T an den Kreis D C T ziehen läßt, so hätte man auch durch diese eine Vertikalebene annehmen können. Sie würde zwey Geraden des Hyperboloids enthalten, die sich in dem Punkt (T, *t*) kreuzen, und deren Vertikalprojektionen die Geraden *r t*, *q t* sind. Die Vertikale M *m m'* träfe diese letzten Geraden in den zwey Punkten *m* und *m'*, welche schon mittelst der Geraden *v t*, *u t* gefunden wurden.

134. Betrachten wir nun zuerst den Berührungspunkt (M, *m*), so kennen wir zwey Erzeugungslinien (R Q, *r q*) und (U V, *u v*), welche sich in diesem Punkt kreuzen; diese Linien sind überdies ihre eigenen Tangenten; als solche gehören sie ganz der zu suchenden tangirenden Ebene, und sie bestimmen daher die Stellung dieser Ebene an dem ersten Berührungspunkt. Die Gerade (R Q, *r q*) schneidet aber die Horizontalebene in (R, *r*), und die Gerade (U V, *u v*) trifft dieselbe Ebene in (U, *u*), daher ist die Gerade R U der Horizontalriß der tangirenden Ebene am Punkt (M, *m*); diese Gerade R U ist, per construct. senkrecht auf den Halbmesser A M und es folgt hieraus, daß die verlangte tangirende Ebene senkrecht auf die Meridianebene A M sey, welche durch den Berührungspunkt (M, *m*) geht. Dieses Ergebniß mußte statt finden, weil die Fläche durch Umdrehung entstanden ist.

Um den Vertikalriß, der in Rede stehenden Ebene zu bestimmen, konstruire man in derselben, die durch den Berührungspunkt gehende Horizontale (M I, *m i*); diese Horizontale schneidet die vertikale Projektionseben in *i*; der Riß R U trifft dieselbe Ebene in K, und folglich ist die Gerade K *i*, die diese beyden Punkte verbindet, auf der Vertikalebene der Riß der tangirenden Ebene am Punkt (M, *m*) des Hyperboloids.

135. Die zwey Punkte (M, *m*) und (M, *m'*) liegen in einer nemlichen Meridianebene und in gleichen Abständen von der Ebene *c d* des kleinen Kehlkreises; daher müssen die tangirenden Ebenen an beyden Punkten durch die Sehne (S T, *s t*) dieses

Kehlkreises gehen, welche parallel ist zu der Sehne R U des Kreises R Q V. Nun aber schneidet die erste verlängerte Sehne die Vertikalebene in l, daher muß die verlängerte Gerade K i durch diesen Punkt l gehen.

Die zwey Erzeugungslinien (V S, v s), (Q T, q t) des Hyperboloids, welche sich in den Punkt (M, m') kreuzen, treffen die Horizontalebene in Q und V; es folgt daraus, daß die tangirende Ebene an demselben Punkt die Horizontalebene nach der Geraden Q V schneide, der Sehne des Kreises R Q V, welche senkrecht auf den Riß A M der durch (M, m') geführten Meridianebene ist. Die zu V Q oder R U parallele Horizontale (M I, m' i') trifft die Vertikalebene in i'. Die Gerade i' l ist daher der Vertikalriß der tangirenden Ebene am Punkt (M, m'). Die beyden Risse l i, l i' machen gleiche Winkel mit der Horizontalen c d, der Vertikalprojektion der Ebene des Kehlkreises.

136. Es ergiebt sich aus den vorstehenden Konstruktionen:

1tens. Wenn man den Punkt R oder V kennt, in welchem eine gerade Erzeugungslinie des Umdrehungs-Hyperboloids die horizontale Projektionsebene trifft, so erhält man den Riß der Ebene, welche die Fläche an irgend einem Punkt derselben Geraden berührt, wenn man durch R oder V eine Senkrechte auf den Riß derjenigen Meridianebene errichtet, welche durch den genommenen Punkt der Erzeugungslinie geht.

2tens. Jede, durch eine gerade Erzeugungslinie des Umdrehungs-Hyperboloids gehende Ebene berührt diese Fläche in dem Punkte, in welchem die Erzeugungslinie von derjenigen Meridianebene geschnitten wird, welche senkrecht auf die berührende Ebene ist.

137. Nach der Anordnung der Figur auf der Tafel IX ist auf der Horizontalebene die Projektion D C T des Kehlkreises des Hyperboloids die Gränze der Horizontalprojektion desselben. Diese Begränzungslinie berührt die Horizontalprojektionen aller Geraden der Fläche. Die Projektionen dieser nemlichen Geraden auf der Vertikalebene sind sämmtlich Tangenten zu einer Hyperbel, welche die Gränze der Vertikalprojektion des Umdrehungs-Hyperboloids bildet, und welche selbst die Projektion des Schnittes dieser Fläche durch die Meridianebene E F ist.

Um übrigens die Tafel nicht zu überladen, haben wir angenommen, das vorgestellte Hyperboloid seye begränzt, 1tens durch die horizontale Projektionsebene, 2tens durch eine horizontale Ebene e' f', welche in der nemlichen Entfernung wie jene von der Ebene c d des Kehlkreises liegt, so daß der Kreis G R E F zu gleicher Zeit der horizontale Riß, und die Projektion des Schnittes der Fläche durch jene letzte Ebene e' f' ist.

Siebente Aufgabe.

Es ist ein hyperbolisches Paraboloid gegeben, mittelst zweyer geraden Leitlinien, und seiner Ebene des Parallelismus, nebst einem Punkt dieser Fläche; man soll die tangirende Ebene zu dem Paraboloid an diesem Punkte konstruiren?

138. Auflösung. Da das hyperbolische Paraboloid auf zwey verschiedene Weisen durch die gerade Linie erzeugt werden kann, und daher durch jeden Punkt der Fläche sich zwey Gerade ziehen lassen, die den beyden Erzeugungssystemen angehören, so ist ersichtlich, daß diese beyden Geraden, auch in jedem Punkt der Fläche die Stellung der tangirenden Ebene bestimmen. (Art. 75.)

Es seyen demnach Taf. X. (A B, a b), (A′ B′, a' b'), die gegebenen geraden Leitlinien, und G G′, g g' die Risse der Ebene des Parallelismus. Nehmen wir an, man habe die beyden Leitlinien durch eine parallele Ebene zu der (G G′, g g') geschnitten, und durch die Durchschnittspunkte (D, d), (C, c) die gerade Erzeugungslinie (C D, c d) des Paraboloids gezogen, und es sey (K, k) ein Punkt dieser Geraden, durch welchen die tangirende Ebene geführt werden soll.

Um die zweyte, durch den Punkt (K, k) gehende gerade Erzeugungslinie des Paraboloids zu bestimmen, ist es vorerst erfoderlich, außer der (C D, c d) noch eine Gerade des ersten Systems zu bestimmen, um diese beyden sodann als die Leitlinien der zweyten Erzeugungsart zu gebrauchen. Dieses geschieht, indem man durch einen beliebig genommenen Punkt (S, s) der ersten Leitlinie (A B, a b) eine zu (G G′, g g') parallele Ebene führt, und den Durchschnittspunkt dieser Ebene und der zweyten Leitlinie (A′ B′, a' b') mit dem erstgenommenen Punkt (S, s) verbindet. Um die hiezu erfoderlichen Konstruktionen so sehr als möglich zu vereinfachen; ziehe man in der gegebenen Ebene (G G′, g g') zwey beliebige Gerade (I E, i e), (I F, i f); durch den Punkt (S, s) ziehe man zu diesen Geraden die Parallelen (S U, s u), (S T, s t), diese Parallelen bestimmen eine parallele Ebene zu der gegebenen (G G′, g g'). Die erste jener Parallelen (S U, s u) durchschneidet die projektirende Ebene A′ B′ in dem Punkte (U, u), die zweyte Parallele (S T, s t) trifft dieselbe Ebene in dem Punkte (T, t). Man ziehe durch t und u die Gerade t u; diese begegnet der Vertikalprojektion a' b' der zweyten Leitlinie in einem Punkt v; man bringe diesen Punkt in Horizontalprojektion nach V, und ziehe die Gerade (S V, s v), so hat man die gesuchte zweyte Erzeugungslinie; denn es ist einleuchtend, daß die Gerade (T U, t u) der Durchschnitt der Ebene A′ B′ und der zur Ebene (G G′, g g') parallelen Ebene sey, und daß der Punkt (V, v) daher der Begegnungspunkt dieser letzten Ebene und der Leitlinie (A′ B′, a' b') ist.

Da sonach zwey Erzeugungslinien (C D, $c\,d$), (S V, $s\,v$) der ersten Erzeugung bekannt sind, so müssen diese als die Leitlinien des zweyten Systems genommen werden, um die Gerade dieses zweyten Systems zu finden, welche durch den Punkt (K, k) geht.

Nun aber müssen alle Erzeugungslinien der zweyten Erzeugungsart parallel seyn zu der Ebene der beyden Leitlinien (A B, $a\,b$), (A′ B′, $a'\,b'$) der ersten Art. (Art. 123) Wenn man daher durch den Punkt (K, k) zwey Gerade (K L, $k\,l$), (K M, $k\,m$) wechselsweise parallel zu den beyden Geraden (A B, $a\,b$) und (A′ B′, $a'\,b'$) zieht, so ist die Ebene dieser Geraden parallel zu der Ebene des Parallelismus des zweyten Erzeugungssystems und sie muß folglich die zu konstruirende Erzeugungslinie enthalten. Aber die Geraden (K L, $k\,l$), (K M, $k\,m$) treffen die projektirende Ebene S V der geraden (S V, $s\,v$) in den Punkten (L, l), (M, m). Man ziehe daher die Gerade (M L, $m\,l$), welche sonach der Durchschnitt der Ebene S V und der zu den beyden Leitlinien parallelen Ebene ist. Der Begegnungspunkt dieser Geraden (M L, $m\,l$) und der Geraden (C D, $c\,d$), dessen Vertikalprojektion n ist, gehört offenbar der verlangten Erzeugungslinie. Wenn man daher die Horizontalprojektion N desselben Punkts bestimmt, und die Gerade (N K, $n\,k$) zieht, so ist diese die Erzeugungslinie des zweyten Systems, welche durch den gegebenen Punkt (K, k) geht.

Die gegebene Erzeugungslinie des ersten Systems schneidet die horizontale Projektionsebene in dem Punkte P. Die so eben bestimmte Erzeugungslinie des zweyten Systems trifft die beyden Projektionsebenen in den Punkten Q und X, daher sind die Geraden P Q R, X R Y die Risse der verlangten tangirenden Ebene.

139. Um eine anschauliche Figur zu erhalten, hat man auf der Tafel X die Projektionen einer hinreichenden Zahl von Erzeugungslinien des Paraboloids konstruirt. Auf der Horizontalbene sind diese Projektionen tangirend zu einer Kurve $\alpha\,\beta\,\gamma$, welche die Gränze der Horizontalprojektion der Fläche bildet; auf der Vertikalebene berühren jene Projektionen eine Kurve $\delta\,\varepsilon\,\zeta$, die Gränze der Vertikalprojektion der Fläche.

Um die Figur jedoch nicht zu sehr zu überladen, so hat man das Paraboloid als begränzt angenommen, 1tens durch die horizontale Projektionsebene, 2tens durch die Horizontalebene Z Z′, drittens durch die Vertikalebene Z Z″. Die horizontale Projektionsebene schneidet das Paraboloid nach einer Kurve $\vartheta\,\lambda\,\mu$, welche man sorgfältig bestimmt hat. Diese Linie wird gebildet durch die Reihe von Punkten, in denen die verschiedenen geraden Erzeugungslinien des Paraboloids die horizontale Projektionsebene durchschneiden; und es ist daher leicht dieselbe zu verzeichnen, sobald man eine genügende Anzahl von Erzeugungslinien des Paraboloids konstruirt hat.

Die horizontale Ebene Z Z′ schneidet das Paraboloid nach einer ähnlichen Kurve, die auf dieselbe Weise aus den Begegnungspunkten dieser Ebene mit den verschiedenen Erzeugungslinien gebildet wird, und deren Horizontalprojektion mit der $\vartheta\, \lambda\, \mu$ zusammenfällt. Die nicht zur Lösung der vorgelegten Aufgabe gehörigen Erzeugungslinien der Fläche sind auf eine regelmäßige Art auf beyden Projektionen des Paraboloids angeordnet.

140. Diese Anordnung, welche außer den nöthigen Konstruktionen zur Bestimmung der verlangten tangirenden Ebene eine deutliche und leichte Darstellung eines hyperbolischen Paraboloids gewährt, gründet sich auf eine Erzeugungsart des hyperbolischen Paraboloids durch die gerade Linie, wobey man die Anwendung einer Ebene des Parallelismus sich entheben kann.

Es beruht diese Erzeugungsart auf dem leicht zu beweisenden Satz: „wenn eine bewegliche Gerade auf zwey festen Geraden dergestalt fortrückt, daß sie immer parallel zu einer nemlichen Ebene bleibt, so schneidet sie in jeder Stellung auf den festen Geraden proportionale Theile ab“; und auf der Contraposition desselben, „wenn eine bewegliche Gerade dergestalt auf zwey Festen fortrückt, daß sie auf Beyden immer proportionale Theile abschneidet, so ist sie in allen ihren Stellungen parallel zu einer nemlichen Ebene und die Fläche, die sie erzeugt, gehört zu dem Geschlecht der hyperbolischen Paraboloid.“

141. Dieses festgesetzt, so seyen M N und M P Fig. 2. *) Zwey unter sich senkrechte Vertikalebenen, und es sey V V′ die Horizontalprojektion einer Geraden, welche senkrecht auf die Ebene M N ist, und folglich parallel zur Ebene M P. Nehmen wir auf dieser Geraden, welche wir (V V′, V″. $v\ v'$) benennen wollen, zwey beliebige Punkte (V, V″, v), (V′, V″, v'); durch diese Punkte ziehen wir zwey beliebige Geraden (A B, $a\ b$, $v\ t'$), (A′ B′, $a'\ b'$, $v'\ t$), deren Horizontalprojektionen A B, A′ B gleiche Winkel machen mit den Projektionsaxen M N, M P, und deren Vertikalprojektionen $v\ t'$, $t\ v'$ parallel sind, und woraus sich ergiebt, daß die Projektionen $a\ b$, $a'\ b'$ derselben Geraden auf gleiche Weise gegen die M N geneigt seyn müssen. Endlich führen wir senkrecht auf M N eine unbestimmte Reihe gleichweit entfernter Ebenen V′ V″, O C′, K E′, F I′, D L′, T T″ rc., von denen die Eine durch den Punkt V″, und die Andere durch den Punkt T geht. Es ist einleuchtend, daß durch diese Ebenen die Geraden (A B, $a\ b$, $v\ t'$), (A′ B′, $a'\ b'$, $t\ v'$) in eine unbestimmte Reihe gleicher Theile (V C′, V″ C, $v\ c$), (C E, C′ E′, $c\ e$), (E I, C′ I′,

*) Die nachfolgenden Konstruktionen sind aus dem Traité de géométrie descriptive von L. L. Vallée entlehnt.

$e\ i$) ꝛc. (T D, T′ D′, $t\ d$), (D F, D′ F′, $d\ f$), (F K, F′ K′, $f\ k$) ꝛc. getheilt werden. Ist dieses geschehen, so verbinde man die Punkte (V, V″, v), (T, T′, t) durch die Gerade (V T, V″ T′, $v\ t$); sodann den, bey (V, V″, v) nächstliegenden Punkt (C, C′, c) mit dem, bey (T, T′, t) nächstliegenden Punkt (D, D′, d) durch die Gerade (C D, C′ D′, $c\ d$); hierauf die entsprechenden Punkte (E, E′, e) und (F, F′, f), (I, I′, i) und (K, K′, k) ꝛc., so sind die erhaltenen Geraden (V T, V″, T′, $v\ t$), (C D, C′ D′, $c\ d$), (E F, E′ F′, $e\ f$), (I K, I′ K′, $i\ k$) ꝛc., die Erzeugungslinien eines hyperbolischen Paraboloids; und da sie sich auf die Ebene M P nach den Garaden $v\ t$, $c\ d$, $e\ f$ ꝛc. projektiren, welche die Parallelen $v'\ t$, $v\ t'$ in gleiche Theile theilen, so folgt daraus, daß diese Erzeugungslinien parallel sind zu der Ebene (G G′, G′ R, g g′), von welcher die Risse G G′, $g\ g'$ senkrecht auf M P sind, und der Riß G′ R parallel zu $v\ t$.

142. Die Erzeugungslinien des ersten Erzeugungssystems ergeben sich, wie man sieht, äußerst leicht; wir werden sogleich zeigen, daß es sich eben so mit jenen des zweyten Systems verhält.

Vorerst hat die Ebene des Parallelismus der zweyten Erzeugung, da sie parallel seyn muß, zu den zwey Leitlinien (A B, $a\ b$, $v\ t'$), (A′ B′, $a'\ b'$, $t\ v'$), als Vertikalriß auf der Ebene M P eine zu $v\ t'$ und $t\ v'$ parallele Gerade G′ Q, und als Horizontalriß, eine auf M P senkrechte Gerade G G′. Auf der andern Seite können zwey beliebige Gerade der ersten Erzeugung als die Leitlinien der zweyten Erzeugung dienen (Art. 123.); man kann daher als diese Leitlinie die Geraden (V T, V″ T′, $v\ t$) und (V′ T, V″ T″, $v'\ t'$) nehmen. Nun aber folgt hieraus, daß die zweyte Erzeugungsart symetrisch mit der Ersten ist, denn alle die Größen, welche diese beyden Systeme bestimmen, und welche wir hier zusammenstellen:

	1te Erzeugungsart.	2te Erzeugungsart.
Ebenen des Parallelismus	(G G′, G′ R)	(G G′, G′ Q)
Leitlinien	(A B, $a\ b$, $v\ t'$) . .	(V′ T, V″ T″, $v'\ t'$)
	(A′ B′, $a'\ b'$, $t\ v'$) .	(V T, V″ T′, $v\ t$)

sind symetrisch, in Bezug auf die Vertikalebene G G′; daher ergeben sich die Geraden der einen Erzeugungsart mittelst derselben Konstruktionen, wie die der Andern. So zum Beyspiel, wenn man eine Ebene $\varphi\ \varepsilon$ parallel zu der Ebene G′, Q führt, so schneidet diese Ebene die Leitlinien (V T, $v\ t$), (V′ T, $v'\ t'$) in zwey Punkten (I, φ), (K, ε) und die Gerade (I K, F′ E′, $\varphi\ \varepsilon$) ist eine Erzeugungslinie des zweyten Systems.

143. Wir bemerken noch im Vorbeygehen, daß wenn die Gerade $\varphi\ \varepsilon$ durch den Punkt x gezogen ist, wo die Projektion $e\ f$ einer Geraden der ersten Erzeugung der Linie G ι begegnet, die erhaltene Erzeugungslinie (I K, F′ E′, $\varepsilon\ \varphi$) und die Erzeugungslinie (E F, E′ F′, $e\ f$) symetrisch sind, in Bezug auf die Ebene G G′. Eben so sind die Erzeugungslinien (I K, I′ K′, $i\ k$), (I K, E′ F′, $\varepsilon\ \varphi$) der zwey Systeme symetrisch, in Bezug auf die Ebene V″ S. Man sieht hieraus, daß die Geraden der zwey Erzeugungssysteme zu zwey und zwey symetrisch gelegen sind, in Bezug auf die Ebenen G G′, V′ S′; und daß folglich jede von diesen Ebenen das Paraboloid in zwey symetrische Theile theilt.

Es ist demzufolge leicht zu ersehen, daß die genannten zwey Ebenen G G′, V″ S nicht von den Ebenen der Hauptschnitte des Paraboloids (Art. 117.) verschieden sind, und daß ihre Durchschnittslinie (G G′, V″ S, z) die Axe der Fläche ist; da ferner die eben angegebenen Konstruktionen dieselben sind, deren wir uns bey der Figur 1 bedient haben, so folgt hieraus, daß die Begränzungslinie $\delta\ \varepsilon\ \zeta$ der Vertikalprojektion und die $\alpha\ \beta\ \gamma$ der Horizontalprojektion zugleich auch die Hauptschnitte der Fläche und folglich Parabeln sind; und da alle parallelen Schnitte des Paraboloids ähnlich sind, so ist die Linie $\vartheta\ \lambda\ \mu$ ebenfalls eine Parabel.

144. Im Allgemeinen werden bey der Aufgabe, mit welcher wir uns beschäftigen, die gegebenen Größen nicht auf so symetrische Art, in Bezug auf die Projektionsebenen geordnet seyn, in diesem Falle wird man die zu machenden Konstruktionen sehr vereinfachen, wenn man die Stellung der Projektionsebenen dergestalt anordnet, daß eine derselben senkrecht auf die Ebene des Parallelismus der Fläche wird.

Achte Aufgabe.

Es sind die drey geraden Leitlinien eines Hyperboloids von einem Netze gegeben, nebst einem Punkte dieser Fläche, man soll die tangirende Ebene an diesem Punkte konstruiren?

145. Auflösung. Man bestimmt die Stellung irgend eine Erzeugungslinie des Hyperboloids, wenn man durch einen auf der ersten gegebenen Leitlinie genommenen Punkt und durch die zweyte Leitlinie eine Ebene führt, welche die Dritte in einem gewissen Punkte schneidet, und wenn man diesen gefundenen Punkt mit dem erstgenommenen verbindet. Ueberdies kann das Hyperboloid von einem Netz auf doppelte Art durch die gerade Linie erzeugt werden, und man kann je drey beliebige Gerade eines Erzeugungssystems als die Leitlinien des zweyten Systems gebrauchen.

Hat man daher außer der, durch den gegebenen Berührungspunkt gehenden geraden Erzeugungslinie mittelst der gegebenen Leitlinien noch zwey andere Gerade der nemlichen Erzeugung konstruirt, so bedient man sich dieser drey Geraden als neuer Leitlinien, um die durch den Berührungspunkt gehende Gerade der zweyten Erzeugung zu bestimmen. Die, durch die beyden gefundenen geraden Erzeugungslinien geführte Ebene, ist die verlangte tangirende. Diese Lösung der vorgelegten Aufgaben, nur durch die gerade Linie und die Ebene, bedarf zu ihrer Erklärung keiner Figur; wir bemerken nur noch, daß die erforderlichen Konstruktionen sich noch bedeutend vereinfachen, wenn man die Stellung der Projektionsebenen so wählt, daß eine derselben senkrecht auf irgend eine der drey gegebenen geraden Leitlinien wird. Wir nehmen aber hier Veranlassung, die Konstruktionen zu einer regelmäßigen Darstellung eines Hyperboloids von einem Netze anzugeben, wobey wir diese Fläche nicht durch drey gerade Leitlinien, sondern durch drey elliptische bestimmt annehmen.

146. Es seyen die Vertikale (A, $a\,a'$) (Taf. XI.) und die zwey unter sich rechtwinkligen Horizontalen (B B′, b), (C D, $c\,d$), von denen die Letzte parallel zur vertikalen Projektionsebene angenommen ist, die drey Haupt-Axen eines Hyperboloids von einem Netze (Art. 116.). Die Ebene der zwey horizontalen Axen schneidet die Fläche nach einer, über denselben Axen konstruirten Ellipse (C B D, $c\ d$); zwey andere, von der Ebene $c\ d$ gleich weit abstehende Horizontalebenen $e\ f$, $e'\ f'$ schneiden das Hyperboloid nach zwey gleichen und der (C B D B′, $c'd$) ähnlichen Ellipsen, die sich auf die horizontale Projektionsebene nach der einzigen Ellipse E V F Q projektiren.

Diese drey Linien nehmen wir als gegeben an, und wir setzen noch als bekannt voraus, daß die Geraden der windischen Flächen des zweyten Grads sich auf die Ebenen der Hauptschnitte dieser Flächen als Tangenten zu diesen Schnitten projektiren. Die Tangenten zu der Ellipse D B C B′ sind daher die Horizontalprojektionen der geraden Erzeugungslinien des gegebenen Hyperboloids.

Wenn demnach die Horizontalprojektion M eines Punktes der Fläche bekannt ist, so geschieht die Bestimmung der Vertikalprojektion m oder m' desselben, und die Konstruktion der tangirenden Ebene an diesem Punkte mittelst der zwey geraden Erzeugungslinien, die sich in demselben kreuzen, auf die gleiche Weise, wie wir es bey dem Umdrehungs-Hyperboloid (Art. 133 et seq.) angegeben haben. Um Wiederholungen zu vermeiden, haben wir die gleichnamigen Punkte in den Tafeln IX und XI mit denselben Buchstaben bezeichnet. Wir begnügen uns nur noch anzuführen, daß die Gerade (A, $a\ a'$) Taf. XI. zwar eine Hauptaxe der Fläche ist, aber keine Umdrehungsaxe, und daß die Gerade A M nicht senkrecht auf den Riß R U ist, wie in der Tafel IX.

147. Man wird bemerken, daß die zwey Halbellipsen E V F, E U F (Taf. XI.) durch die Horizontalprojektionen der Geraden des Hyperboloids in die gleiche Anzahl von Bögen getheilt sind; daß je zwey dieser Bögen in gleichen Abständen von der großen Axe E F gleich sind, und daß endlich die Horizontalprojektion irgend einer Geraden des Hyperboloids immer durch zwey Theilungspunkte der Ellipse E V F R geht. Die Abtheilungsart dieser Ellipse gründet sich auf einige Eigenschaften des Hyperboloids, die wir als durch die Analysis bewiesen annehmen.

Das Hyperboloid von einem Netze kann, so wie alle Flächen des zweyten Grads, durch zwey Reihen paralleler Ebenen nach Kreisen geschnitten werden. Drey dieser Kreise, die einem nemlichen System angehören, bestimmen daher die Bewegung der geraden Erzeugungslinie. Wenn man annimmt, daß einer dieser Kreise in gleiche Theile getheilt ist, so theilt die bewegliche Gerade die andern zu diesem parallelen Kreise der Fläche in die nemliche Anzahl gleicher Theile; es folgt daraus, daß zwey Kreise und eine gerade Erzeugungslinie das Hyperboloid bestimmen, was durch drey, in parallenen Ebenen gegebene Kreise geht.

Zwey parallele Ebenen, welche unter einer bestimmten Neigung durch die großen Axen (E F, ef), (E F, $e'f'$) der zwey Ellipsen (E V F, $e\ f$), (E V F, $e'\ f'$) geführt sind, schneiden das gegebene Hyperboloid nach zwey gleichen parallelen Kreisen von einem Durchmesser gleich E F, und von denen die Ellipse E V F R die gemeinschaftliche Horizontalprojektion ist.

Denken wir uns die Umfänge dieser beyden Kreise in eine gerade Anzahl gleicher Bögen getheilt, von den Endpunkten (F, f), (F, f') ihrer parallelen Durchmesser anfangend. Wir werden ein neues Hyperboloid erzeugen, wenn wir von dem Punkt (F, f) des untern Kreises eine Gerade dergestalt nach einem Theilpunkte des oberen Kreises ziehen, daß diese Gerade nicht in einer Ebene mit den beyden Mittelpunkten (A, a), (A, a') ist. Diese Gerade bestimmt die Stellung aller übrigen Geraden des einen Erzeugungssystems. Wenn man um einen Bogen auf dem untern Kreise vorrückt, rückt man ebenfalls um einen Bogen auf dem obern Kreise vor, die Gerade, welche die Endpunkte der beyden Bögen verbindet, ist eine zweyte Stellung der Erzeugungslinie. Ueberdem kann man von dem Punkte (F, f) zwey Gerade von gleicher Länge nach zwey bestimmten Punkten des oberen Kreises ziehen, und es ist einleuchtend, daß diese beyden von (F, f) gleich weit entfernten Punkte in einer auf E F senkrechten Ebene wie V V′ liegen müssen. Die Gerade, welche (F, f) mit dem zweyten Punkte verbindet, bestimmt die Stellung aller Geraden der zweyten Erzeugung.

Die zwey Kreise von den Durchmessern (E F, $e\ f$), (E F, $e'\ f'$) des zweyten

Hyperboloids projektiren sich nach der einzigen Ellipse E F U, daher projektiren sich die Geraden dieser Fläche, welche sich in den Theilungspunkten der zwey Kreise kreuzen, nach Geraden, welche sich in den Theilungspunkten der Ellipse E F U kreuzen und da die Geraden beyder Erzeugungssysteme des Hyperboloids durch die nemlichen Theilpunkte der zwey Kreise gehen, so muß die Horizontalprojektion irgend einer jener Geraden durch zwey Theilungspunkte der Ellipse gehen. Es ist, um diese Eintheilung zu erhalten, nicht nöthig, die Neigung der Ebenen jener Kreise in Bezug auf die Ebene der Ellipse zu kennen: man beschreibt über E F als Durchmesser einen Halbkreis, welchen man in gleiche Theile theilt, und man fällt aus den Theilungspunkten Senkrechte auf die Gerade E F; diese Senkrechten theilen die Ellipse E F V auf die verlangte symetrische Art.

Da jedoch in der Nähe der Geraden E e, F f jene Senkrechten den Umfang der Ellipse unter zu spitzem Winkel schneiden würden, so ist es gut, die Neigung der Ebene zu bestimmen, welche das Hyperboloid nach einem Kreise schneidet. Die Senkrechte Z X auf die Axe B B′ schneidet der Kreisumfang vom Durchmesser E F in dem Punkte X; man ziehe durch denselben den Halbmesser A X. Der Winkel Z A X mißt die Neigung der Ebene der Ellipse E F V und der Ebene des Kreises, welcher sich horizontal nach dieser Ellipse projektirt. Hat man den Viertelskreis E H in gleiche Theile getheilt, so fälle man aus jedem Theilpunkt wie G′ eine Senkrechte G′ g' auf A H; man trage A g' auf dem Halbmesser A X noch A g, so werden die unter sich rechtwinkligen und wechselsweise zu den Axen B B′, C D parallelen Geraden g G, G′ G sich in einem Theilpunkte G der Ellipse E V F R schneiden.

148. Diese Eintheilung der Ellipse ist sehr bequem, um darnach ein Modell eines Hyperboloids von einem Netze aus Fäden zu verfertigen.

Man nimmt zwey gleiche und ähnlich gestellte elliptische Scheiben, deren Mittelpunkte auf einer Geraden liegen, die senkrecht auf ihre Ebenen ist. Auf dem Rande jeder Scheibe befestigt man an den oben angegeben Theilungspunkten kleine Stifte oder Häkchen. Der Faden, welcher nacheinander die entsprechenden Theilpunkte beyder Ellipsen verbindet, erzeugt das Hyperboloid, dessen Kehle in einer Ebene liegt, die parallel zu den beyden Scheiben, und in gleicher Entfernung von diesen Scheiben ist. Wenn man anstatt der elliptischen zwey kreisförmige Scheiben nähme, so würde das Hyperboloid von einem Netze ein Umdrehungs-Hyperboloid nach der Figur der Tafel IX.

---

149. Aus der Auflösung der bis jetzt vorgelegten Aufgaben über die Konstruktion der tangirenden Ebenen zu den windischen Flächen des zweyten Grads geht hervor, daß der Berührungspunkt dieser Flächen mit ihren tangirenden Ebenen sich aus dem Durch-

schnitte zweyer geraden Linien ergebe, und daß diese zwey Geraden, welche den beyden Systemen von geraden Linien angehören, nach denen diese Flächen erzeugt werden können, den vollständigen Schnitt derselben durch die tangirende Ebene ausmachen.

Wenn daher eine dieser Flächen gegeben ist, und es handelt sich, den Berührungspunkt derselben mit einer Ebene zu finden, welche durch eine ihrer geraden Erzeugungslinien geführt ist, so wird die Anwendung der in Art. 132. vorgetragenen Methode sehr einfach, denn man hat nur nöthig, die Durchschnittspunkte dieser Ebene mit noch zwey anderen Geraden des nemlichen Erzeugungssystems zu konstruiren, und diese Punkte durch eine Gerade zu verbinden. Der Begegnungspunkt dieser letzten Geraden, mit der gegebenen Erzeugungslinie ist offenbar der gesuchte Berührungspunkt.

150. Wir werden nun zeigen, daß man bey jeder windischen Fläche, welches auch die besondere Art ihrer Erzeugung sey, ein Hyperboloid von einem Netz konstruiren könne, welches die vorgelegte Fläche nach einer geraden Erzeugungslinie berührt, und welches folglich an allen Punkten dieser gemeinschaftlichen Erzeugungslinie einerley tangirende Ebene mit derselben hat.

Von den Berührungen der windischen Flächen unter sich.

151. Es seyen A B, A′ B′, A″ B″ (Taf. XII. Fig. 2.) drey beliebige krumme Leitlinien einer windischen Fläche, und A A′ A″ eine gerade Erzeugungslinie derselben, welche die drey Krummen in den Punkten A, A′, A″ schneidet. Nachdem man durch jeden dieser Punkte zu der Leitlinie, welcher er angehört die Tangenten A α, A′ α', A″ α'' gezogen hat, betrachte man diese als die geraden Leitlinien eines Hyperboloids von einem Netz. Dieses Hyperboloid wird offenbar tangirend zu der vorgelegten Fläche seyn, in allen Punkten der Geraden A A′ A″, welche jenes mit dieser gemein hat; denn indem die bewegliche Gerade sich auf den unendlich kleinen Elementen der krummen Leitlinien bewegt, welche diese mit ihren Tangenten an den Punkten A, A′, A″ gemein haben, ist sie zu gleicher Zeit auf beyden Flächen, diese haben daher das windische Flächenelement A a A′ a' A″ a'', was zwischen zwey aufeinanderfolgenden Stellungen A A′ A″, a a' a'' der beweglichen Geraden gefaßt ist, mit einander gemein; und folglich auch an jedem Punkte dieses Elements eine gemeinschaftliche tangirende Ebene.

Es ist einleuchtend, daß, wenn man durch die drey Punkte A, A′, A″ drey andere Linien A C, A′ C′, A″ C″ der windischen Fläche führte, die bewegliche Gerade die nemliche Fläche erzeugen würde, wenn sie sich auf diesen, oder auf den drey ersten Krummen, als Leitlinien, bewegte, und wenn man an den Punkten A, A′, A″, die Tangenten zu den drey Krummen A C, A′ C′, A″ C″ konstruirte, so würden diese ein neues

Hyperboloid bestimmen, welches ebenfalls längs der Geraden A A′ A″ tangirend zu der allgemeinen windischen Fläche wäre. Die geraden Leitlinien des Hyperboloids, welches eine windische Fläche nach einer gemeinschaftlichen Erzeugungslinie A A′ A″ berührt, sind daher nur der Bedingung unterworfen, durch drey Punkte A, A′, A″ dieser Geraden zu gehen, und in den tangirenden Ebenen zu der windischen Fläche an eben diesen Punkten enthalten zu seyn.

152. Von welcher besonderen Art demnach eine windische Fläche seyn mag, so giebt es eine unendliche Menge Hyperboloide von einem Netz, welche ein Element mit dieser Fläche gemein haben können, oder sie nach einer Geraden berühren. Jedes von diesen Hyperboloiden hat als Leitlinien drey Gerade, welche willkührlich in den tangirenden Ebenen und durch drey Punkte der geraden Berührungslinie der windischen Fläche und des Hyperboloids gezogen sind.

153. Die berührenden Hyperboloide einer windischen Fläche werden hyperbolische Paraboloide, wenn die drey, in den drey tangirenden Ebenen genommenen geraden Leitlinien parallel zu einer Ebene sind. Die windische Fläche kann daher auch von einer unendlichen Menge hyperbolischer Paraboloide nach einer geraden Erzeugungslinie berührt werden.

Allgemeine Aufgabe.

Die Erzeugung einer windischen Fläche ist bekannt und gegeben; man soll durch einen ebenfalls gegebenen Punkt dieser Fläche eine tangirende Ebene zu derselben führen?

154. Auflösung. Nachdem man die durch den Berührungspunkt der vorgelegten Fläche gehende gerade Erzeugungslinie konstruirt hat, führe man durch diese Gerade drey verschiedene Ebenen. Diese Ebenen sind sämmtlich tangirend zu der windischen Fläche, und man bestimmt ihre Berührungspunkte nach der (Art. 132.) vorgetragenen Methode. Ist dieses geschehen, so führe man in den drey tangirenden Ebenen, und durch die drey gefundenen Berührungspunkte, drey beliebige Geraden, und nehme diese als die geraden Leitlinien eines Hyperboloids von einem Netze. Dieses Hyperboloid hat an allen Punkten der oben genannten geraden Erzeugungslinie einerley tangirende Ebene mit der vorgelegten windischen Fläche. Die Aufgabe kommt also darauf zurück, durch einen gegebenen Punkt eines Hyperboloids von einem Netze, dessen drey gerade Leitlinien bekannt sind, eine tangirende Ebene zu führen; und ist (Art. 145.) aufgelößt. Die drey Geraden Leitlinien des tangirenden Hyperboloids können, da ihre Lage in den drey tangi-

renden Ebenen der windischen Fläche unbestimmt ist, so gewählt werden, daß sie parallel zu einer nemlichen Ebene sind, und in dieser Hypothese wandelt das Hyperboloid sich in ein berührendes hyperbolisches Paraboloid um. (Art. 122.)

Wir werden weiter unten (Art. 328.) aus diesen Eigenschaften der windischen Flächen eine allgemeine graphische Auflösung des Problems der Tangenten ableiten.

Fünftes Kapitel.

Tangirende Ebenen zu krummen Flächen, deren Berührungspunkt nicht gegeben ist.

Bedingungen, welche die Stellung der tangirenden Ebenen zu einer krummen Fläche bestimmen.

155. In den verschiedenen Aufgaben über die tangirenden Ebenen zu den krummen Flächen, welche wir bis jetzt aufgelößt haben, setzten wir stets voraus, daß der Punkt, durch welchen die tangirende Ebene geführt werden sollte, auf der Fläche genommen, uud daß er selbst der Berührungspunkt sey: diese einzige Bedingung war hinreichend, um die Stellung der Ebene zu bestimmen. Aber dem ist nicht also, sobald der Punkt, durch den die Ebene gehen soll, außerhalb der Fläche genommen ist.

156. Soll die Stellung einer Ebene bestimmt seyn, so muß sie drey verschiedenen Bedingungen entsprechen, von denen jede gleichbedeutend damit ist: durch einen gegebenen Punkt zu gehen. Nun aber entspricht im Allgemeinen die Eigenschaft, tangirend zu einer krummen Fläche zu seyn, sobald der Berührungspunkt nicht gegeben ist, nur einer einzigen von diesen Bedingungen. Wenn daher die Stellung einer Ebene durch Bedingungen dieser Art festgesetzt werden soll, so bedarf es deren, im Allgemein drey. In der That, nehmen wir an, es seyen uns drey krummen Flächen gegeben, und es sey eine Ebene tangirend zu einer von ihnen; so können wir uns vorstellen, die Ebene bewege sich um diese Fläche, ohne daß sie aufhöre sie zu berühren. Sie wird dieses nach allen erdenklichen Richtungen thun können, nur wird sich nach Masgabe der Ortsveränderung der Ebene, der Berührungspunkt auf der Fläche bewegen, und seine Bewegung wird in derselben Richtung statt haben, wie die der Ebene. Nehmen wir nun an, diese Bewegung geschehe so lange nach irgend einer Seite hin, bis die Ebene der zweyten

Fläche in einem gewissen Punkte begegne: die Ebene ist sodann zu gleicher Zeit tangirend zu den zwey ersten Flächen, aber ihre Stellung ist noch nicht festgesetzt.

Wir können uns in der That vorstellen, daß sich die Ebene um die zwey Flächen bewege, ohne aufzuhören sie beyde zu berühren; nur wird es ihr jetzt nicht mehr frey stehen, sich wie vorher nach allen Richtungen zu bewegen, sie kann dies nur noch nach einer Einzigen thun. So wie die Ebene ihre Stellung verändert, bewegen sich die beyden Berührungspunkte, jeglicher auf seiner angehörigen Fläche, und zwar dergestalt, daß, wenn man sich eine Gerade durch diese zwey Punkte gezogen denkt, ihre Bewegungen nach einerley Seite, in Bezug auf diese Gerade, geschehen, wenn die Ebene die zwey Flächen von derselben Seite berührt; und nach den entgegengesetzten Seiten, wenn die Eebne die erste Fläche von der einen, und die Zweyte von der andern Seite berührt. Stellen wir uns endlich vor, daß diese Bewegung, die Einzige, die Statt haben kann, fortdauere, bis die Ebene die dritte Fläche in einem gewissen Punkt berühre: so ist alsdann die Stellung der Ebene festgesetzt, und sie kann sich nicht weiter bewegen, ohne aufzuhören, berührend zu einer der drey Flächen zu seyn.

157. Man sieht hieraus, daß um die Stellung einer Ebene zu bestimmen, mittelst unbestimmter Berührungen mit gegebenen krummen Flächen, im Allgemeinen drey erfoderlich seyen. Wenn daher eine tangirende Ebene zu einer gegebenen krummen Fläche geführt werden soll, so gilt diese Bedingung nur für eine von den drey, denen die Ebene genug thun kann: man kann folglich noch zwey Andere nach Gefallen nehmen, und die Ebene zum Beyspiel, durch zwey gegebene Punkte gehen lassen, oder was auf Eines heraus kommt, durch eine gegebene Gerade rc. Wenn endlich die Ebene drey gegebene Flächen berühren sollte, so könnte man über keine weitere Bedingung mehr verfügen, und ihre Stellung wäre bestimmt.

158 Das so eben Gesagte gilt von den krummen Flächen im Allgemeinen; jedoch muß dasjenige davon ausgenommen werden, was auf alle Cylinderflächen, auf alle Kegelflächen und überhaupt auf alle aufwickelbaren Flächen Bezug hat; denn bey dieser Klasse von Flächen ist die Berührung mit einer Ebene nicht auf einen einzigen Punkt beschränkt, sie dehnt sich längs einer unbestimmten Geraden aus, die mit einer Stellung der geraden Erzeugungslinie zusammenfällt. (Art. 130.)

Die Eigenschaft einer Ebene eine einzige dieser Flächen zu berühren, gilt für zwey Bedingungen, weil sie ihr auferlegt, durch eine Gerade zu gehen, und es bliebe in diesem Fall nur noch eine einzige Bedingung frey, wie zum Beyspiel die, durch einen gegebenen Punkt zu gehen. Es kann daher nicht aufgegeben werden, eine Ebene zu führen, welche zu gleicher Zeit zwey von diesen Flächen berührt, und um so weniger noch

drey; wenn anders nicht einige besondere Umstände diese Bedingungen vereinbar machen sollten.

Es wird wohl nicht ohne Nutzen seyn, ehe wir weiter gehen, einige Beyspiele zu geben, von der Nothwendigkeit, in die man kommen kann, tangirende Ebenen zu krummen Flächen zu führen, durch Punkte, die außerhalb derselben genommen sind. Das erste Beyspiel wollen wir aus der Konstruktion der Festungswerke entnehmen.

159. Bey dem Vortrage der allgemeinen Grundsätze der Befestigungskunst, setzt man zuerst voraus, daß der Boden, welcher die Festung, nach allen Seiten, auf Kanonenschußweite umgiebt, horizontal sey, und keine Erhöhung darbiete, welche dem Belagerer einigen Vortheil gewähren könnte: sodann bestimmt man, nach dieser Hypothese, den Umriß des Hauptwalles, der halben Monde, der bedeckten Wege und der vorliegenden Werke; und man giebt die Beherrschungen (commendemens) an, welche die verschiedenen Theile der Befestigung übereinander haben müssen, damit sie sämmtlich auf die wirksamste Weise zu ihrer wechselseitigen Vertheidigung beytragen.

Um sodann diese Grundsätze auf den Fall anzuwenden, wenn der, die Festung umgebende Boden eine Höhe darbietet, die der Belagerer benützen könnte, und gegen welche die Befestigung defilirt werden muß, so wird eine neue Betrachtung erfoderlich. Wenn nur eine einzige Anhöhe vorhanden ist, so wählt man in dem Platze zwey Punkte, durch die man sich zu der Höhe, gegen welche man sich defiliren will, eine tangirende Ebene geführt denkt: Diese tangirende Ebene heißt die Defilementsebene, und man giebt allen Theilen der Befestigung dasselbe Relief über die Defilementsebene, was sie über die Horizontalebene bekommen hätten, wenn der Boden waagerecht gewesen wäre: hierdurch erhalten die Einen über die Andern, und Alle zusammen über die benachbarte Anhöhe, dieselbe Beherrschung, wie über einen horizontalen Boden, und die Befestigung hat die nemlichen Vortheile, wie im ersten Fall. Was die Wahl der zwey Punkte anbelangt, durch welche die Defilementsebene gehen soll, so muß diese den zwey folgenden Bedingungen Genüge thun: 1tens daß der Winkel, den die Ebene mit dem Horizont macht, der möglich kleinste sey, damit die Wallgänge einen geringern Abhang bekommen, und dadurch der Vertheidigungsdienst um so weniger erschwert werde; 2tens daß die Höhe der Werke über den natürlichen Boden ebenfalls die möglich geringste sey, damit ihre Erbauung weniger Arbeit und weniger Unkosten verursache.

Wenn in der Umgebung des Platzes zwey Höhen lägen, gegen welche die Befestigung zumal zu defiliren wäre, so müßte die Defilementsebene zu gleicher Zeit tangirend zu den Oberflächen dieser beyden Anhöhen seyn. Es bliebe sodann, um ihre Stellung festzusetzen, nur eine einzige Bedigung frey, und man würde darüber verfügen, das heißt,

man würde in dem Platze den Punkt, durch welchen die Ebene gehen soll, auf eine solche Art wählen, daß dadurch den, bey dem ersten Falle vorgetragenen Bedingungen so vollkommen als möglich entsprochen würde.

Das zweyte Beyspiel, was wir anführen wollen, ist abermals aus der Mahlerey genommen.

160. Auf den Oberflächen der Körper, besonders wenn sie polirt sind, erscheinen schimmernde Punkte von einem Glanze, ähnlich jenem des leuchtenden Körpers, der sie bescheint. Die Lebhaftigkeit dieser Punkte ist um so größer, und ihre Ausdehnung um so geringer, je mehr die Oberflächen polirt sind. Bey den rauhen Oberflächen haben die schimmernden Punkte bedeutend weniger Glanz, und nehmen einen größeren Theil der Oberfläche ein.

Bey einer jeder Fläche ist der Glanzpunkt durch folgende Bedingung bestimmt: daß der einfallende Lichtstrahl und der Reflexionsstrahl, welcher nach dem Auge des Beschauers gerichtet ist, in einer nemlichen Ebene liegen, welche senkrecht auf die tangirende Ebene an jenem Punkt ist, und mit dieser Ebene gleiche Winkel bilden; weil der glänzende Punkt der Fläche als Spiegel wirkt, und einen Theil des Bildes des leuchtenden Gegenstandes nach den Auge des Beschauers zurückschickt. Die Bestimmung dieses Punktes erfodert eine außerordentliche Präzision, und wenn auch eine Zeichnung noch so korrekt wäre, und die scheinbaren Umrisse selbst mit einer mathematischen Genauigkeit gezogen, so würde doch der geringste Fehler in der Stellung des glänzenden Punktes sehr bedeutend werden, in Betreff des Aussehens der Formen. Wir wollen dafür nur einen einzigen aber sehr auffallenden Beweis beybringen.

Die kugelförmige Oberfläche des Auges ist polirt, und überdies noch mit einer dünnen Lage von Feuchtigkeit überzogen, welche die Politur um so vollkommener macht. Wenn man ein offenes Auge betrachtet, so nimmt man auf der Oberfläche einen schimmernden Punkt wahr, von einem großen Glanze und von geringer Ausdehnung, dessen Stellung von denen des erhellenden Gegenstandes und des Beobachters abhängt. Wäre die Oberfläche des Auges vollkommen rund, so könnte es sich um seine Vertikalaxe drehen, ohne daß der schimmernde Punkt die geringste Veränderung erlitte. Aber diese Oberfläche ist in der Richtung der Seheaxe verlängert, und wenn sie sich um die Vertikalaxe dreht, so wechselt auch der schimmernde Punkt. Eine lange Uebung hat uns sehr empfindlich für diesen Wechsel gemacht, und er bestimmt größtentheils unser Urtheil über die Richtung der Augenkugel. Hauptsächlich nach der Verschiedenheit in den Stellungen der glänzenden Punkte auf den beyden Augenkugeln einer Person schließen wir, ob dieselbe schiele oder nicht, oder ob sie uns anschaue, und wenn sie dies nicht thut, nach welcher Seite sie blicke.

Indem wir dieses Beyspiel anführen, verlangen wir nicht, daß auf einem Bilde die Stellung der glänzenden Punkte auf der Augenkugel geometrisch bestimmt werden müsse, unsere Absicht war blos zu zeigen, wie leicht begangene kleine Fehler in der Stellung dieses Punkts sehr bedeutend werden können, in Betreff der anscheinenden Gestalt des Gegenstandes, wenn gleich die Zeichnung der scheinbaren Umrisse desselben, die nemliche bleibt.

Aufgaben über die tangirenden Ebenen zu den krummen Flächen, welche durch gegebene Punkte im Raum geführt sind.

161. Die Kugelfläche ist eine der einfachsten, die man betrachten kann; ihre Erzeugungsart hat sie mit einer großen Zahl verschiedener krummen Flächen gemein; so könnte man sie zum Beyspiel unter die Umdrehungsflächen reihen, und ihrer keine besondere Erwähnung thun, aber ihre Regelmäßigkeit giebt zu merkwürdigen Resultaten Veranlassung, von denen einige durch ihre Neuheit anziehend sind, und mit denen wir uns zuförderst beschäftigen wollen, weniger um ihrer selbst willen, als um eine Gewandtheit in der Betrachtung der drey Dimensionen zu erhalten, welche wir zu allgemeineren und nützlicheren Gegenständen nöthig haben.

Erste Aufgabe.

Man soll durch eine gegebene Gerade eine tangirende Ebene zu einer gegebenen Kugelfläche führen?

Erste Auflösung.

162. Es sey (A, a), (Taf. XIII. Fig. 1.) der Mittelpunkt der Kugel, B C D die Projektion des größten Horizontalkreises, und (E F, e f) die gegebene Gerade. Durch den Mittelpunkt der Kugel sey eine Ebene senkrecht auf die gegebene Gerade geführt, und (G, g) sey der Begegnungspunkt der Ebene und der Geraden, nach der bekannten Methode konstruirt. *)

Dieses festgesetzt, so sieht man vorerst leicht ein, daß durch die gegebene Gerade zwey tangirende Ebenen zu der Kugel geführt werden können, die dieselbe von zwey entgegengesetzten Seiten berühren; was zwey verschiedene Berührungspunkte bestimmt, deren Projektionen zu konstruiren wären.

---

*) Die hiezu erfoderlichen abgekürzten Konstruktionen sind auf der Tafel angegeben.

Wenn man zu diesem Ende, aus dem Mittelpunkt der Kugel sich zwey Senkrechte auf die beyden tangirenden Ebenen gefällt denkt, so trifft jede in den Berührungspunkt der Kugel mit der entsprechenden tangirenden Ebene, und sie sind beyde in der Ebene enthalten, welche senkrecht auf die gegebene Gerade geführt ist; daher liegen die zwey Berührungspunkte in dem Schnitte der Kugel durch die senkrechte Ebene, welcher Schnitt ein größter Kreis der Kugel ist, zu dem die zwey Schnitte derselben Ebene durch die tangirenden Ebenen, Tangenten sind.

Wenn man sich in der senkrechten Ebene eine Horizontale denkt, deren Projektionen die Horizontale $a\ h$ und die auf E F senkrechte Gerade A H sind, und wenn man sich vorstellt, daß die senkrechte Ebene sich um diese Horizontale, als Scharnier drehe, bis sie selbst horizontal geworden sey, so wird ihr Schnitt durch die Kugelfläche offenbar mit dem Umkreise B C D zusammenfallen, ihre zwey Berührungspunkte werden auf eben diesen Kreis zu liegen kommen, und wenn man den Punkt J konstruirt, wohin sich der Begegnungspunkt der gegebenen Geraden mit der senkrechten Ebene, nach vollzogener Bewegung auflegt, indem man die Weite (G H, $g\ h$) $= g'\ h'$ auf der E F von H nach J trägt, und sodann zu dem Kreise B C D, die Tangenten J C, J D zieht, so bestimmen diese die beyden Berührungspunkte C, D in der Stellung, die sie genommen haben, nachdem die senkrechte Ebene auf die Horizontalebene zurückgelegt ist.

Um nun ihre Projektionen in ihrer natürlichen Stellung zu erhalten, denke man sich die senkrechte Ebene in die ursprüngliche Lage zurückversetzt, indem sie sich abermals um die Horizontale (A G, $a\ g$) als Scharnier dreht, und wobey sie sowohl den Punkt (J, j) mit sich führt, als auch die zwey Tangenten J C, J D, nachdem sie verlängert worden bis zu ihrer Begegnung in K, K′ mit der Horizontalen A H; und endlich die Sehne C D, welche ebenfalls dieselbe Gerade A H in einem Punkte N schneidet. Es ist einleuchtend, daß bey dieser Bewegung, die auf dem Scharnier liegenden Punkte K, K′ und N fest bleiben, die Berührungspunkte C, D hingegen irgendwo auf den Geraden C P, D Q, welche senkrecht auf A H sind, zu liegen kommen werden.

Aber bey der rückgängigen Bewegung der senkrechten Ebene hören die Tangenten J C K′, J D K nicht auf, durch ihre respektiven Berührungspunkte zu gehen. Nun fällt der Punkt J nach vollendeter Bewegung wiederum nach G; die zwey Tangenten projektiren sich daher nach G K′, G K, und da ebenfalls jede von ihnen die Projektion eines Berührungspunktes enthalten muß, so ergeben sich die Durchschnittspunkte R und S dieser Geraden mit den entsprechenden C P, D Q als die gesuchten Projektionen, welche überdies mit N in einer geraden Linie liegen müssen.

Wenn man die Punkte K, K′ auf die Horizontale *a g* nach *k*, *k′* projektirt und die Geraden *g k*, *g k′* zieht, so hat man die Vertikalprojektionen der zwey nemlichen Tangenten, und aus diesen ergeben sich die Punkte *r* und *s* als die Vertikalprojektionen der beyden Berührungspunkte.

Für die erste tangirende Ebene haben wir die zwey Geraden (E F, *e f*), und (G K, *g k*), und für die zweyte, die Geraden (E F, *e f*) und (G K′, *g k′*); es ist demnach leicht ihre zugehörigen Risse zu konstruiren.

163. Diese Auflösung würde weit eleganter werden, wenn man die zwey Projektionsebenen durch den Mittelpunkt der Kugel gehen ließe; die beyden Projektionen der Kugel würden dadurch in einen und denselben Kreis zusammenfallen, und die Verlängerungen der geraden Linien weniger groß werden. Es geschah nur der größeren Klarheit wegen, daß wir die zwey Projektionen abgesondert haben.

Zweyte Auflösung.

164. Es sey (A, *a*) (Taf. XIII Fig. 2.) der Mittelpunkt der Kugel, (A B, *a b*) ihr Halbmesser, B C D die Projektion ihres größten Horizontalkreises, und (E F, *e f*) die gegebene Gerade. Die Ebene des großen Horizontalkreises sey verlängert, bis sie die gegebene Gerade (E F, *e f*) in einem Punkte (G, *g*) schneidet.

Dieses festgesetzt, wenn man denselben Punkt (G, g) als Scheitel einer Kegelfläche nimmt, welche die Kugel umhüllt, so erhält man durch die zwey Tangenten G C, G D, welche den Kreis C B D in den zwey Punkten C und D berühren, die Projektionen zweyer horizontalen Erzeugungslinien der Kegelfläche. Diese Fläche berührt die Kugel nach einem Kreise, dessen Diameter C D ist, dessen Ebene senkrecht auf die Axe des Kegels und folglich vertikal ist, und welcher als Horizontalprojektion die gerade C D hat.

Wenn man sich durch die Gerade (E F, *e f*) zwey tangirende Ebenen zu der Kegelfläche denkt, so wird eine jede auch die Kugel berühren, und zwar in einem Punkte des Vertikalkreises C D, nach welchem die Kugel selbst von der Kegelfläche berührt ist; daher sind die beyden gedachten Ebenen, diejenigen, deren Stellung zu bestimmen ist: ihre Berührungspunkte müssen sich irgendwo auf die Gerade C D projektiren, und die Gerade, welche die beyden Berührungspunkte verbindet, muß ebenfalls unbestimmt in der C D projektirt seyn.

Die Ebene des zur Vertikalebene parallelen größten Kreises, hat zur Horizontalprojektion die unbestimmte Parallelene A B zu L M, und sie schneidet die Gerade (E F, *e f*) in einem Punkte (H, *h*). Betrachten wir diesen Punkt als Scheitel einer neuen Ke-

gelfläche, welche, so wie die Erste die Kugel umhüllt, so sind die aus h geführten Tangenten h K, h I, welche den Kreis b K I in K und I berühren, die Vertikalprojektionen ihrer äußersten Kanten. Diese zweyte Kegelfläche berührt die Kugel nach einem neuen Kreise, wovon K I der Diameter und dessen Ebene, welche senkrecht auf die Vertikalebene ist, sich unbestimmt nach der K I projektirt. Dieser Kreis geht ebenfalls durch die Berührungspunkte der Kugel mit den beyden verlangten tangirenden Ebenen, daher sind die Vertikalprojektionen dieser zwey Berührungspunkte irgendwo auf der Geraden I K, und folglich ist auch die Gerade, welche die beyden Berührungspunkte verbindet, in der nemlichen Geraden I K projektirt.

Die durch die beyden Berührungspunkte gehende Gerade, ist demnach horizontal in C D, und vertikal in I K projektirt, und sie durchneidet die Ebene des großen Horizontalkreises in einem Punkte (N, n).

165. Stellen wir uns nun vor, daß die Ebene des in C D projektirten Vertikalkreises sich um seinen horizontalen Durchmesser als Scharnier drehe, um selbst horizontal zu werden, und daß dieser bey seiner Bewegung, die beyden Berührungspunkte und die Gerade, welche dieselben verbindet, mit sich führe. Man wird diesen Kreis in seiner neuen Stellung konstruiren, wenn man über C D als Durchmesser, den Kreis C P D Q beschreibt. Die Gerade der beyden Berührungspunkte, wenn sie in ihrer neuen Stellung konstruirt ist, wird auf dem horizontalen Kreis C P D Q, durch ihr Zusammentreffen mit demselben, auch die neue Stellung jener Punkte bestimmen.

Nun aber bleibt der auf dem Scharnier C D liegende Punkt N jener Geraden unveränderlich, der Punkt, in welchem sie die Ebene des zur Vertikalebene parallelen großen Kreises durchschneidet, und dessen Projektionen O und t sind, dieser Punkt sage ich, beschreibt überdies einen Viertelsbogen eines auf C D senkrechten Vertikalkreises, dessen Halbmesser die vertikale o t ist; wenn man daher durch O eine Gerade senkrecht auf C D zieht, und auf derselben o t von O nach T trägt, so ist der Punkt T der Geraden der Berührungspunkte zugehörig, und folglich ist N T diese Gerade; durch ihr Zusammentreffen in P und Q mit dem Kreis C P D Q bestimmt dieselbe die beyden Berührungspunkte in ihrer auf die Horizontalebene zurückgelegten Stellung. Um die Horizontalprojektionen der nemlichen Punkte in ihrer natürlichen Stellung zu erhalten, denke man sich den Kreis C P D Q in seine ursprüngliche Lage zurückversetzt, in dem er sich wieder um dasselbe Scharnier C D dreht. Die zwey Punkte P und Q bleiben bey dieser Bewegung in den Vertikalebenen, deren Projektionen die auf C D senkrechten Geraden R P, Q S sind; diese nemlichen Punkte müssen sich aber auch irgend wo auf die C D projektiren, daher bestimmen die Begegnungspunkte R und S dieser Geraden mit den Gera-

den P R und Q S die Horizontalprojektionen der beyden Berührungspunkte; und die Vertikalprojektionen derselben ergeben sich, wenn man die Punkte R, S auf die Gerade I K nach r und s projektirt.

Auch diese zweyte Auflösung würde weit gedrängter werden, wenn man die beyden Projektionsebenen durch den Mittelpunkt der Kugel führte, wodurch die zwey Projektionen auf eine und dieselbe Figur beschränkt würden.

* *
*

166. Diese letzten Betrachtungen leiten uns auf die Entdeckung mehrerer merkwürdigen Eigenschaften des Kreises, der Kugel, der Kegelschnitte und der krummen Flächen vom zweyten Grad.

Wir haben so eben gesehen, daß jede der zwey um die Kugel umschriebenen Kegelflächen dieselbe nach einem Kreise berühre, und daß diese beyden Kreise durch die zwey Berührungspunkte der Kugel mit den tangirenden Ebenen gehen. Diese Eigenschaft ist kein besonderes Eigenthum der zwey betrachteten Kegelflächen, sie kommt allen denen zu, die ihre Scheitel in der gegebenen Geraden haben, und welche gleichfalls um die Kugel umschrieben sind. Wenn man sich daher eine erste Kegelfläche denkt, die ihren Scheitel in der gegebenen Geraden hat, und um die Kugel umschrieben ist, und wenn man annimmt, diese Fläche bewege sich dergestalt, daß ihr Scheitel die Gerade durchläuft, ohne daß sie selbst aufhöre, umschrieben und berührend zur Kugel zu seyn, so wird sie in jeder Stellung die Kugel nach einem Kreise berühren; alle diese Kreise werden durch die zwey nemlichen Punkte gehen, welche die Berührungen der Kugel mit den zwey tangirenden Ebenen sind, und die Ebenen derselben Kreise werden sich sämmtlich nach einer nemlichen geraden Linie schneiden, welche jene der zwey Berührungen ist. Wenn man sich endlich die Ebene denkt, welche durch die gegebene Gerade, und durch den Mittelpunkt der Kugel geführt ist, so wird diese Ebene, die durch die Axen aller Kegelflächen geht, senkrecht auf die Ebenen aller Berührungskreise seyn, und folglich auch auf die Gerade, welche der gemeinschaftliche Durchschnitt derselben ist, und sie wird alle diese Ebenen nach geraden Linien schneiden, die sämmtlich durch einen nemlichen Punkt gehen.

Umgekehrt, wenn eine Kugel und eine gerade Linie gegeben sind, und man denkt sich durch die Gerade so viele Ebenen als man will, welche die Kugel nach Kreisen schneidet, und wenn man zu jedem dieser Kreise sich eine gerade Kegelfläche denkt, von welcher derselbe die Grundlinie, und welche um die Kugel umschrieben ist, so werden die Scheitel aller dieser Kegelflächen in einer nemlichen anderen geraden Linie liegen.

167. Betrachtet man allein das, was in der Ebene vorgeht, welche durch die gegebene Gerade, und durch den Mittelpunkt der Kugel geführt ist, so wird man auf die zwey folgenden Sätze geleitet, welche die unmittelbaren Folgesätze zu dem Vorhergehenden sind.

„Es ist in einer Ebene ein Kreis gegeben, (Taf. XVI. Fig. 2 et 3.) dessen Mittelpunkt „A sey, und irgend eine Gerade E C; wenn man aus einem beliebigen Punkt D dieser Geraden „zwey Tangenten zu dem Kreise zieht, und die Gerade E F, welche durch die zwey Berührungs„punkte geht, und man stellt sich vor, der Punkt D bewege sich längs der Geraden und führe die „Tangenten mit sich, ohne daß diese aufhören, den Kreis zu berühren, so werden die zwey Berüh„rungspunkte, so wie die, sie verbindende Gerade E F ihre Stellung verändern, aber diese Gerade „wird immer durch den nemlichen Punkt N gehen, welcher in der aus dem Mittelpunkt auf die „Gerade gefällten Senkrechten A G liegt."

„Umgekehrt, wenn man durch einen in der Ebene eines Kreises genommenen Punkt N, so „viele Geraden E F zieht, als man will, von denen jede den Umkreis in zwey Punkten schneidet, „und wenn man durch diese zwey Punkte zu dem Kreise zwey Tangenten E D, F D zieht, wel„che sich irgend in einem Punkte D schneiden, so wird die Reihe aller dieser auf die gleiche Art „gefundenen Durchschnittspunkte in einer nemlichen, auf A N senkrechten geraden Linie B C liegen."

168. Nicht deßwegen, weil alle Punkte eines Umkreises gleich weit vom Mittelpunkte entfernt liegen, besitzt der Kreis, die oben vorgetragene Eigenthümlichkeit, sondern weil er eine Kurve vom zweyten Grad ist, und alle Kegelschnittslinien sind in dem gleichen Falle.

In der That, es sey A B E F (Taf. XVI. Fig. 4.) irgend ein Kegelschnitt, und C D eine beliebige, in seiner Ebene gegebene Gerade: stellen wir uns vor, die Kurve drehe sich um eine ihrer Axen A B um eine Umdrehungsfläche zu erzeugen, und denken wir uns durch die Gerade C D zwey tangirende Ebenen zu dieser Fläche geführt, so wird jede dieser Ebenen ihren besonderen Berührungspunkt haben. Dieses festgesetzt, wenn man einen beliebigen Punkt H der Geraden C D als Scheitel nimmt, und sich eine Kegelfläche umschrieben und tangirend zu der Umdrehungsfläche denkt, so wird sie diese letzte Fläche nach einer Kurve berühren, welche nothwendig durch die zwey Berührungspunkte mit den tangirenden Ebenen gehen muß.

Diese Kurve wird eben seyn; ihre Ebene, welche senkrecht auf jene des gegebenen Kegelschnitts ist, wird auf diese letztere nach einer geraden Linie E F projektirt seyn, und diese Gerade wird durch die zwey Berührungspunkte des Kegelschnitts mit den durch den Punkt H gezogenen Tangenten gehen. Nehmen wir sofort an, der Scheitel H der Kegelfläche bewege sich auf der Geraden C D, ohne daß diese Fläche aufhöre umschrieben und berührend zu der Umdrehungsfläche zu seyn, so wird ihre Berührungskurve in jeder Stellung die nemlichen Eigenthümlichkeiten haben, durch die zwey Berührungspunkte mit den tangirenden Ebenen zu gehen, eben zu seyn, und ihre Ebene senkrecht auf die des Kegelschnitts zu haben. Daher werden die Ebenen aller Kurven durch die Gerade gehen, welche die beyden Berührungspunkte verbindet, und welche selbst senkrecht auf die Ebene des Kegelschnittes ist; daher endlich sind die Projektionen aller Ebenen gerade Linien, die sämmtlich durch die Projektion N der Geraden gehen, welche die beyden Berührungspunkte verbindet.

169. Endlich ist dieser Satz selbst nur ein besonderer Fall eines andern allgemeinern, welcher in den drey Dimensionen statt findet, und den wir uns vorzutragen begnügen.

„Es ist im Raum irgend eine krumme Fläche vom zweyten Grad gegeben und eine umschrie„bene Kegelfläche, die sie berührt, und deren Scheitel in irgend einem Punkte liegt; wenn sich die „Kegelfläche bewegt, ohne aufzuhören um die erste Fläche umschrieben zu seyn und dieselbe zu be„rühren, jedoch so, daß ihr Scheitel irgend eine gerade Linie durchläuft, so geht die Ebene der Be„rührungskurve der zwey Flächen immer durch eine nemliche gerade Linie (welche bestimmt ist, durch „die beyden Berührungspunkte der Fläche vom zweyten Grad mit den zwey tangirenden Ebenen, „die durch die Gerade der Scheitel gehen): und wenn die Kegelfläche sich so bewegt, daß ihr „Scheitel immer in einer Ebene bleibt, so geht die Ebene der Berührungskurve immer durch einen „nemlichen Punkt.“

Herr Brianchon hat in seinem Mémoire sur les surfaces courbes du second degré den Beweis zu den vorstehenden Sätzen Monge's, so wie zu dem folgenden ganz allgemeinen Theorem gegeben:

„Es ist irgend eine krumme Fläche vom zweyten Grad gegeben, und eine umschriebene Kegel„fläche, welche sie berührt und deren Scheitel in irgend einem Punkte liegt; wenn die Kegelfläche „sich bewegt, ohne aufzuhören um die erste Fläche umschrieben zu seyn und sie zu berühren, jedoch „so, daß ihr Scheitel eine andere, willkührlich im Raume gestellte Fläche vom zweyten Grad “durchläuft, so wird die Ebene der Berührungskurve der zwey Flächen beständig eine dritte Fläche „vom zweyten Grad berühren.“

Zweyte Aufgabe.

Durch einen gegebenen Punkt eine Ebene zu führen, welche zu gleicher Zeit zwey gegebene Kugeln berührt?

170. Auflösung. Es sey (A, *a*) (Taf. XIV. Fig. 1.) der Mittelpunkt der ersten Kugel; (B, *b*) jener der zweyten; und (C, *c*) der gegebene Punkt; es sey ferner die Gerade (A B, *a b*) konstruirt, welche durch zwey Mittelpunkte geht, so wie die Projektionen G E F, *g e f*, H I K, *h i k* der zu den beyden Projektionsebenen parallelen größten Kreise beyder Kugeln. Man denke sich die Kegelfläche, welche um beyde Kugeln zugleich umschrieben ist, und sie beyde berührt. Diese Fläche muß ihren Mittelpunkt in der Geraden haben, welche durch jene der beyden Kugeln geht. Man ziehe zu den zwey Kreisen G E F, H I K, die zwey gemeinschaftlichen Tangenten E H, F K, welche sich in einem Punkt D, der Geraden A B schneiden. Dieser Punkt ist die Horizontalprojektion des Mittelpunkts der Kegelfläche, dessen Vertikalprojektion *d* auf der verlängerten Geraden *a b* liegt. Endlich ziehe man die Gerade (C D, *c d*), welche durch den Mittelpunkt des Kegels und durch den gegebenen Punkt geführt ist.

Dieses festgesetzt, so denke man sich durch jene letzte Gerade zwey tangirende Ebenen zu dem Kegel geführt; diese werden denselben nach zwey Erzeugungslinien berühren, und beyde auch tangirend zu den zwey Kugeln seyn. Die Aufgabe ist also darauf zurückgebracht, durch die Gerade, welche durch den Mittelpunkt der Kegelfläche und durch den gegebenen Punkt geht, zwey tangirende Ebenen zu einer der beyden Kugeln zu führen, und diese beyden Ebenen sind sodann auch tangirend zu der andern Kugel.

171. Es ist hier zu bemerken, daß man sich zwey Kegelflächen um die beyden nemlichen Kugeln umschrieben denken kann. Die erste umhüllt alle beyden von Außen, und ihr Mittelpunkt liegt jenseits der einen Kugel, in Bezug auf die andere: die tangirenden Ebenen zu dieser Kegelfläche berühren jede der beyden Kugeln von derselben Seite. Die zweyte Kegelfläche umhüllt die eine Kugel von Außen und die andere von Innen, und ihr Mittelpunkt liegt zwischen jenem der beyden Kugeln. Man erhält die Horizontalprojektion D′ dieses Mittelpunkts, wenn man zu den zwey Kreisen E F G und H I K die zwey innern Tangenten zieht, welche sich in einem Punkt der Geraden A B schneiden; und man findet seine Vertikalprojektion, indem man den Punkt D′ nach d' auf $a\,b$ projektirt. Die beyden zu dieser Kegelfläche geführten tangirenden Ebenen berühren ebenfalls eine jede der zwey Kugeln; aber sie berühren die erste von der einen Seite, und die zweyte von der Andern. Demnach können vier verschiedene Ebenen der Aufgabe Genüge thun: bey zwey von ihnen sind die beyden Kugeln auf der nemlichen Seite der Ebene; bey den zwey Andern sind sie auf verschiedenen Seiten.

Dritte Aufgabe.

Man soll eine tangirende Ebene zu drey gegebenen Kugeln führen?

172. Auflösung. Denken wir uns die tangirende Ebene zu den drey Kugeln sey geführt, und stellen wir uns eine Kegelfläche vor, welche um die beyden ersten Kugeln umschrieben ist, und sie beyde berührt; so wird die tangirende Ebene diese Kegelfläche längs einer Kante berühren, und durch ihren Mittelpunkt gehen.

Wenn man sich eine zweyte Kegelfläche denkt, welche um die erste und die dritte Kugel umschrieben ist; so wird die nemliche tangirende Ebene auch diese Fläche ebenfalls längs einer ihrer Kanten berühren und folglich durch ihren Mittelpunkt gehen. Wenn man sich endlich eine dritte Kegelfläche denkt, welche die zweyte und die dritte Kugel umfaßt und berührt, so wird die tangirende Ebene sie auch nach einer ihrer Kanten berühren und durch ihren Mittelpunkt gehen. Die Mittelpunkte der drey Kegelflächen liegen demnach in der tangirenden Ebene; aber sie liegen auch in der Ebene, welche

durch die Mittelpunkte der drey Kugeln geht, und welche die drey Axen enthält: sie sind daher in gerader Linie. Es folgt hieraus, daß wenn man die Projektionen jener Mittelpunkte konstruirt, wie wir es in der vorhergehenden Aufgabe angegeben haben, so kann man durch diese Projektionen jene einer geraden Linie führen, welche in der tangirenden Ebene enthalten ist. Die Aufgabe kommt also dahin zurück, durch eine gegebene Gerade eine tangirende Ebene zu einer beliebigen von den drey Kugeln zu führen, was mittelst der vorstehenden Methoden ausgeführt wird, und diese Ebene ist sodann tangirend zu den zwey übrigen.

173. Da man stets zu irgend zwey Kugeln, zwey Kegelflächen denken kann, welche jene beyden umhüllen und berühren, und von denen die erste ihren Mittelpunkt außerhalb der Mittelpunkte der Kugeln hat; und die zweyte den ihrigen zwischen denselben, so ist es einleuchtend, daß es in der vorstehenden Aufgabe sechs Kegelflächen gäbe, deren drey von Außen um die Kugeln, zu zwey und zwey genommen, umschrieben sind, und von denen die drey übrigen ihre Mittelpunkte zwischen den Kugeln haben. Bezeichnen wir die Mittelpunkte der drey ersten Kegelflächen mit C, C', C'', und die Mittelpunkte der letzteren mit c, c', c''. Von diesen sechs Kegeln haben die drey, welche von einer nemlichen Ebene berührt sind, ihre Mittelpunkte in einer nemlichen Geraden, und diese Gerade ist (Art. 172.) der Durchschnitt der tangirenden Ebene zu den drey Kugeln und der Ebene, welche durch die drey Mittelpunkte derselben geht. Die sechs Mittelpunkte C, C', C'', c, c', c'' sind überdies auf vier Geraden vertheilt. In der That müssen unter den Verbindungen jener sechs Mittelpunkte, zu drey und drey, ausgeschlossen werden; 1tens jene, in welchen sich C und c, oder C' und c', oder C'' und c'' vorfindet, weil eine und dieselbe Ebene nicht zu gleicher Zeit die zwey Kegelflächen berühren kann, welche um zwey Kugeln von Innen und von Außen umschrieben sind; 2tens jene, in welchen einer der drey Mittelpunkte c, c', c'' mit zweyen von den drey Mittelpunkten C, C', C'' verbunden vorkommt; weil eine Ebene, welche je zwey von den drey äußeren Kegeln berührt, nothwendig auch den dritten berührt; endlich die Verbindung $c\,c'\,c''$, weil die Ebene, welche zwey innere Kegel berührt, nothwendig einen äußeren berührt. Die Verbindungen der Mittelpunkte zu drey und drey, reduziren sich demnach auf folgende vier:

$$C\,C'\,C'' - C\,c'\,c'' - c\,C'\,c'' - c\,c'\,C'';$$

sie bestimmen vier Gerade, und durch jede derselben kann man zwey tangirende Ebenen zu irgend einer der drey Kugeln führen. Es giebt daher acht verschiedene Ebenen, welche der Aufgabe Genüge thun; zwey von ihnen berühren die drey Kugeln von einer

Seite; die sechs übrigen sind so gelegen, daß sie zwey Kugeln von einer, und die dritte von der entgegengesetzten Seite berühren.

* * *

174. Diese Betrachtungen führen uns auf folgenden Satz:

„Es sind drey beliebige Kreise, nach Größe und Stellung, in einer Ebene gegeben. (Taf. XIV. „Fig. 2.), wenn man, indem man sie zu zwey und zwey betrachtet, zu ihnen die äußeren Tangen- „ten zieht, und diese verlängert, bis sie sich schneiden, so liegen die drey, auf diese Art erhaltenen „Durchschnittspunkte D, E, F, in gerader Linie."

Denn wenn man sich die drey Kugeln denkt, von welchen diese Kreise größte Kreise sind, und eine Ebene, welche sie alle drey von außen berührt, so berührt diese Ebene auch die drey, um die Kugeln zu zwey und zwey umschriebenen Kegelflächen, und geht durch ihre drey Mittelpunkte D, E, F. Aber diese drey Punkte D, E, F, liegen auch in der Ebene der Mittelpunkte der drey Kugeln; sie liegen daher in zwey verschiedenen Ebenen, und folglich in gerader Linie.

„Wenn man zu denselben Kreisen, zu zwey und zwey genommen, die inneren, sich durchkreu- „zenden Tangenten zieht, so sind die drey neuen Durchschnittspunkte G, H, I, zu zwey und zwey „in gerader Linie mit einem der drey ersten, so daß die sechs Punkte D, E, F, G, H, I, die „Durchschnitte von vier Geraden sind."

175. Endlich ist dieser Satz nur ein besonderer Fall des folgenden, welcher in drey Dimensionen statt hat.

„Es sind vier beliebige Kugeln nach Größe und Stellung im Raume gegeben, wenn man sich „die sechs Kegelflächen denkt, welche von Außen um diese Kugeln, zu zwey und zwey genommen, „umschrieben sind, so liegen die Mittelpunkte dieser sechs Kegel in einer und derselben Ebene und „in den Durchschnitten von vier Geraden; und wenn man sich die sechs andern, von Innen um- „schriebenen Kegelflächen denkt, das heißt jene, welche ihre Mittelpunkte zwischen denen von zwey „Kugeln haben, so sind die Mittelpunkte dieser sechs neuen Kegel zu drey und drey in einer Ebene „mit drey von den ersten."

Vierte Aufgabe.

Man soll durch einen willkührlich im Raume genommenen Punkt eine tangirende Ebene zu einer gegebenen Cylinderfläche führen?

176. Auflösung. Es sey E I F K (Taf XV. Fig. 1.) die auf der Horizontalebene gegebene Grundlinie der Cylinderfläche; (A B, *a b*) sey eine Parallele zu der geraden Erzeugungslinie derselben, und (C, *c*) sey der Punkt, durch den die tangirende Ebene gehen soll.

Da die Berührung der verlangten Ebene und der Cylinderfläche längs einer geraden Erzeugungslinie dieser Letzteren statt findet, so muß eine durch (C, *c*) geführte Parallele zu der Geraden (A B, *a b*) nothwendig ganz in der tangirenden Ebene liegen. Wenn man daher die Projektionen C D, *c d* dieser Parallelen konstruirt, und den Begegnungspunkt derselben mit einer der Projektionsebenen, zum Beyspiel den Punkt (D, *d*) bestimmt, so wird dieser Punkt dem Risse der tangirenden Ebene auf derselben Projektionsebene angehören. Nun aber muß jeder Riß der tangirenden Ebene berührend zu dem entsprechenden Risse der Cylinderfläche seyn; man hat daher nur durch D alle zu der Kurve E I F K möglichen, Tangenten D E, D F zu ziehen, um die Horizontalrisse aller tangirenden Ebenen zu erhalten, die durch den gegebenen Punkt zu der Cylinderfläche geführt werden können. Indem man die Berührungspunkte E, F der gefundenen Risse auf die Projektionsaxe nach *e* und *f* projektirt, sodann durch (E, *e*), (F, *f*) zu der (A B, *a b*) die Parallelen (E G, *e g*), (F H, *f h*) zieht, hat man die geraden Erzeugungslinien, nach welchen die verschiedenen tangirenden Ebenen die Cylinderfläche berühren.

Zur Vervollständigung der Zeichnung bestimme man noch die Risse der gefundenen tangirenden Ebenen auf der Vertikalebene, und in beyden Projektionen die geraden Begränzungslinien der Cylinderfläche wie bey der Aufgabe 1. Kap. II.

Fünfte Aufgabe.

Man soll parallel zu einer bekannten Geraden eine tangirende Ebene zu einer gegebenen Cylinderfläche führen?

177. Auflösung. Die Grundlinie der Cylinderfläche sey die auf der Horizontalebene gegebene Kurve C D E (Taf. XV. Fig. 2.). (E F, *e f*) sey eine ihrer geraden Erzeugungslinien; und (A B, *a b*) sey die gegebene Gerade, zu welcher die tangirende Ebene parallel seyn soll.

Durch einen beliebigen Punkt (L, *l*) der gegebenen Geraden (A B, *a b*) führe man eine Parallele (L M, *l m*) zu der Erzeugungslinie des Cylinders, und man konstruire die Risse A M, *b l'* einer durch diese beyden Geraden geführten Ebene.

Man wird leicht einsehen, daß die verlangte tangirende Ebene parallel zu dieser letztgenannten Ebene seyn müsse, und ihre Risse daher wechselsweise parallel zu A M und *b l'*; denn jene Ebene soll einmal parallel seyn, zu der gegebenen Geraden, und da sie auch eine gerade Erzeugungslinie des Cylinder enthalten muß, so kann sie nur parallel zu der durch (A B, *a b*) und parallel zu der Erzeugungslinie des Cylinders geführten Ebenen seyn.

Ueberdies müssen die zu A M und $b\ l'$ parallelen Risse der gesuchten Ebene, die respektiven Risse der Cylinderfläche berühren; wenn man daher zu der Kurve C D E und parallel zu A B alle möglichen Tangenten G C, H D.... rc. zieht, so hat man eben so viele Horizontalrisse tangirender Ebenen zu dem Cylinder, die sämmtlich parallel zu der Geraden (A B, $a\ b$) sind. Der noch übrige Theil der Auflösung ist ganz derselbe wie bey der vorhergehenden Aufgabe und er bedarf daher keiner weiteren Erklärungen.

Sechste Aufgabe.

Durch einen außerhalb einer Kegelfläche genommenen Punkt, soll eine tangirende Ebene zu dieser Fläche geführt werden?

178. Auflösung. E G F H (Taf. XVI. Fig. 1.) sey die auf der Horizontalebene gegebene Grundlinie der Kegelfläche; (A, a) ihr Mittelpunkt und (C, c) der Punkt, durch den die tangirende Ebene gehen soll.

Da alle tangirenden Ebenen einer Kegelfläche durch den Mittelpunkt der Fläche gehen, so verbinde man diesen Mittelpunkt (A, a) und den gegebenen Punkt (C, c) durch eine Gerade (A C, $a\ c$). Diese Gerade, welche demzufolge ganz der gesuchten Ebene angehört, trifft die horizontale Projektionsebene, auf welcher die Grundlinie des Kegels gegeben ist in einem Punkt (D, d), und dieser ist sonach ein Punkt des Horizontalrisses derselben Ebene. Wenn man daher durch den Punkt D so viele Tangenten D E, D F... an den Riß E G F H zieht, als deren zuläßig sind, so erhält man dadurch die Horizontalrisse aller tangirenden Ebenen, welche der Aufgabe Genüge leisten können. Diese Risse treffen die Projektionsaxe in L und H, und da die Gerade (A C, $a\ c$) die Vertikalebene in (D′, d') trifft, so sind die Geraden L d', H d', die Vertikalrisse derselben tangirenden Ebene.

Indem man die Berührungspunkte E, F der Basis des Kegels mit den Rissen der tangirenden Ebenen auf die Projektionsaxe nach e, f projektirt, und die Geraden (E A, $e\ a$), (F A, $f\ a$) zieht, wodurch man die Berührungslinien der Kegelfläche mit den tangirenden Ebenen bekommt, so findet man durch die Begegnungspunkte e', f' dieser Geraden mit der vertikalen Projektionsebene; ebenfalls zwey Punkte der Risse L d', H d', und zugleich ein Prüfungsmittel für die Genauigkeit der Kostruktion.

Wie bey der analogen Aufgabe über die tangirenden Ebenen zu dem Cylinder bestimme man auch hier auf beyden Projektionsebenen, die Projektionen der äußersten Erzeugungslinien nach dem Verfahren des Art. 83. Kap. II. um die Zeichnung zu vollenden.

Siebente Aufgabe.

Man soll parallel zu einer bekannten Geraden eine tangirende Ebene zu einer gegebenen Kegelfläche führen?

179. Auflösung. Man führe durch den Mittelpunkt der Kegelfläche eine Parallele zu der gegebenen Geraden. Durch einen beliebig genommenen Punkt dieser Parallelen, zum Beyspiel, durch den Punkt, in welchem sie die Horizontalebene durchschneidet, führe man, nach der vorhergehenden Aufgabe, eine tangirende Ebene zu der Kegelfläche. In der, auf diese Weise gefundenen tangirenden Ebene wird die Parallele zu der gegebenen Geraden ganz enthalten seyn, und diese Ebene ist daher die verlangte.

Wenn man durch den Punkt, in welchem die Parallele die Horizontalebene trifft, mehrere tangirende Ebenen zu der Kegelfläche führen kann, so entsprechen diese sämmtlich den Bedingungen der Aufgabe.

Wir überlassen dem Leser die Ausführung der angegebenen Konstruktionen, die nach dem vorhergehenden durchaus keine Schwierigkeit darbieten.

Achte Aufgabe.

Durch eine gegebene Gerade soll eine tangirende Ebene zu einer gegebenen Umdrehungsfläche geführt werden?

Erste Auflösung (Taf. XVII.)

180. Wir nehmen die horizontale Projektionsebene senkrecht auf die Drehungsaxe an, wodurch unbeschadet der Allgemeinheit der Auflösung die Konstruktionen vereinfacht werden. Es sey demnach L M (Taf. XVII.) der Durchschnitt der Projektionsebene; (A, *a a′*) die Axe der Umdrehungsfläche. *i k o*..., sey die Vertikalprojektion des Erzeugungsmeridians, dessen Ebene L′ A M′ parallel zur vertikalen Projektionsebene ist; (B C, *b c*) sey die gegebene Gerade. Aus dem Punkt A sey auf B C die Senkrechte A D gefällt, welches die Horizontalprojektion der kürzesten Entfernung der Axe und der gegebenen Geraden ist, und der Punkt D sey nach *d* auf die Gerade *b c* projektirt.

Dieses festgesetzt, stellen wir uns vor, die tangirende Ebene sey geführt; und nehmen wir an, die gegebe Gerade drehe sich um die Axe (A, *a a′*), ohne weder ihre Entfernung von dieser Axe, nach ihrer Neigung gegen die Horizontalebene zu verändern, und sie zöge die tangirende Ebene mit sich, so daß diese immer die Fläche berühre. Es ist einleuchtend, daß vermöge dieser Bewegung der Berührungspunkt der Fläche und der Ebene die Stellung verändern werde; aber da die tangirende Ebene stets die gleiche

Neigung beybehält, so verändert der Berührungspunkt seine Höhe auf der Fläche nicht, und er wird sich in dem Umfange eines Parallelkreises der Fläche bewegen. Ueberdies wird die gegebene Gerade durch ihre Bewegung um die Axe ein Umdrehungshyperboloid von einem Netze erzeugen, zu welchen die tangirende Ebene in allen ihren Stellungen tangirend ist, weil sie immer durch eine Erzeugungslinie der Fläche geht. (Art. 136.)

Denken wir uns nun durch den Berührungspunkt der tangirende Ebene mit der ersten Fläche eine Meridianebene geführt, so wird diese Ebene, welche senkrecht auf die tangirende Ebene seyn muß, (Art. 89.) die gerade Erzeugungslinie des Hyperboloids in einem Punkt durchschneiden, welcher der Berührungspunkt dieser Fläche mit derselben tangirenden Ebene ist.

181. Da die Aufgabe mittelst der zweyten Umdrehungsfläche gelößt werden soll, so ist es vorerst erfoderlich, den Schnitt dieses Hyperboloids durch die zur vertikalen Projektionsebene parallele Meridianebene L′ A M′ zu konstruiren.

Es sey auf der gegebenen Geraden irgend ein Punkt (E, e) genommen: suchen wir den Punkt, in welchem derselbe, in seiner Bewegung, auf die Ebene des Schnittes trifft. Der Punkt (E, e) wird sich in dem Umfange eines horizontalen Kreises bewegen, dessen Mittelpunkt auf der Axe (A, $a\,a'$) liegt, und dessen Horizontalprojektion man erhält, indem man aus dem Punkt A als Mittelpunkt und mit dem Halbmesser A E einen Kreisbogen E F E′ beschreibt, welcher von der Geraden L′ M′ in zwey Punkten wie F geschnitten wird. Die Vertikalprojektion desselben Bogens ergiebt sich, wenn man durch den Punkt e die unbestimmte Horizontale $e\,f$ zieht.

Da nun die Begegnungspunkte des Bogens (E F E′, $e\,f$) mit der Ebene des Schnittes horizontal in F.. projektirt sind, so bestimme man ihre Projektionen f.. auf der Vertitalebene, und man hat die Projektionen eben so vieler Punkte des Schnittes. Wiederholt man dieses Verfahren bey einer beliebigen Anzahl anderer Punkte der gegebenen Geraden, so erhält man eben so viele Punkte f, g, p, n.... ꝛc., durch welche man die zwey Zweige $f\,p\,g$, $f\,p\,g$ gehen läßt, und man hat die Vertikalprojektion des gesuchten Meridianschnittes.

182. Nachdem dieses geschehen, nehmen wir an, daß die gegebene Gerade und die tangirende Ebene durch ihre gleichzeitige Rotation um die Axe in eine solche Stellung gekommen seyen, worinn die tangirende Ebene senkrecht auf die vertikale Projektionsebene wäre. In dieser Stellung wird ihre Projektion auf derselben Ebene eine gerade Linie seyn, und diese Gerade wird zu gleicher Zeit Tangente seyn, zu den zwey krummen Linien $f\,g\,p$, $i\,k\,o$. Wenn man daher zu diesen zwey Krummen die gemeinschaftlichen Tangenten $p\,i$, $n\,k$ zieht, so hat man die Projektionen aller tangirenden Ebe-

nen, welche der Aufgabe Genüge thun, und zwar in der Stellung betrachtet, wenn sie durch die Rotation nacheinander senkrecht auf die Vertikalebene geworden sind. Die Berührungspunkte *i*, *k* dieser Tangenten mit der Erzeugungslinie der ersten Fläche bestimmen die Höhen der Berührungspunkte dieser Fläche mit allen tangirenden Ebenen. Wenn man folglich durch diese Punkte die unbestimmten Horizontalen *i i*, *k k* zieht, so enthalten diese die Vertikalprojektionen der Berührungspunkte der Fläche mit den Ebenen; und wenn man aus A als Mittelpunkt Kreisbögen R K, I Q von Durchmessern gleich *i i* und *k k* beschreibt, so werden diese Bögen die Horizontalprojektionen derselben Punkte enthalten.

Auf gleiche Weise geben die Berührungspunkte *n*, *p* die Höhen und respektiven Durchmesser der Parallelkreise des Umdrehungshyperboloids an, in welchen die Berührungspunkte dieser letzten Fläche mit den gesuchten tangirenden Ebenen enthalten seyn müssen. Diese Parallelkreise haben als Vertikalprojektionen die Horizontalen *p h*, *n j*, und man erhält ihre Horizontalprojektionen, wenn man die Punkte *n*, *p* auf die L′ M′ nach N, P projektirt, und aus A als Mittelpunkt und mit den Halbmessern A P, A N nacheinander die Kreisbögen P H, N J zieht.

Aber die Berührungspunkte des Hyperboloids und der gesuchten Ebenen liegen nicht nur auf den eben beschriebenen Parallelkreisen; sie müssen auch auf der gegebenen Geraden liegen, und sie sind daher bestimmt, durch das Zusammentreffen der Geraden (B C, *b c*) und der Kreisbögen (P H, *p h*), (N J, *n j*) in den Punkten (H, *h*), (J, *j*).

Die Meridianebenen, welche durch diese Berührungspunkte, (H, *h*), (J, *j*) des Hyperboloids und der gesuchten tangirenden Ebenen gehen, haben als Horizontalprojektionen die Geraden A H, A J, und die Stellung dieser letzten Ebenen ist durch die zwey Bedingungen bestimmt, durch die gegebene Gerade (B C, *b c*) zu gehen, und senkrecht auf die Meridianebenen A H, A J zu seyn.

Nun aber liegen die Berührungspunkte der gegebenen Umdrehungsfläche und der gesuchten tangirenden Ebenen in den Meridianebenen A H, A J, welche durch die entsprechenden Berührungspunkte mit dem Hyperboloid geführt sind, und da sie auch auf den Parallelkreisen liegen, deren Horizontalprojektionen die Bögen Q I, R K sind, so sind die Punkte Q, R, in welchen diese letzten Bögen von den Geraden A H, A J geschnitten werden, die Horizontalprojektionen der Berührungspunkte der gegebenen Umdrehungsfläche und der gesuchten, durch die Gerade (B C, *b c*) gehenden tangirenden Ebenen. Die Vertikalprojektionen derselben Punkte ergeben sich, wenn man die Punkte Q, R auf die entsprechenden Horizontalen *k k*, *i i* nach *q* und *r* projektirt.

Diese Methode kann leicht verallgemeinert und auf Flächen angewendet werden, die durch krumme Linien erzeugt sind, von beständiger Gestalt und von veränderlicher Stellung im Raume.

183. Zusatz zu vorstehender Auflösung. *)

Wir haben angenommen, daß jede der beyden Tangenten $p\ i$, $n\ k$ durch ihre Berührungspunkte auf den Meridianschnitten der gegebenen Umdrehungsfläche und des Umdrehungshyperboloids bestimmt wäre. In der Praxis der Zeichnungskunst zieht man diese Tangenten, indem man ein Lineal tangirend an die beyden gegeben Kurven anlegt.

Die erste so gezogene Tangente trifft die Axe der beyden Umdrehungsflächen in dem Punkt v. (er liegt in unserer Figur nicht mehr innerhalb der Zeichnung). Betrachtet man diesen Punkt als den Scheitel eines geraden Kegels, welcher durch die, um die Axe (A, $a\ a'$) sich drehende Gerade $p\ i$ erzeugt wird, so ist die tangirende Ebene zu diesem Kegel, welche durch die gegebene Gerade geführt ist, die gesuchte Ebene **). Nun aber hat dieser Kegel als Basis auf der Horizontalebene den Kreis W H′, welcher aus dem Mittelpunkt A beschrieben ist, und mit einem Halbmesser A W, gleich der Entfernung des Mittelpunktes von dem Punkte W, in welchem die Tangente (A W, $v\ ip$) der Horizontalebene trifft. Daher hat die verlangte tangirende Ebene als Horizontalriß die Tangente B H′ zu dem Umkreise W H′ ***). Die zweyte verlangte tangirende Ebene hat als Horizontalriß die Tangente B J′ zu dem Umkreise Y J′, welcher aus A als Mittelpunkt beschrieben ist, und mit einem Halbmesser A Y, gleich dem Abstande des Mittelpunktes A von dem Durchschnittspunkt (Y, y), der Tangente ($n\ k\ y$, A N Y) und der Horizontalebene. Die Ebenen, welche durch die gegebene Gerade tangirend zu den zwey geraden Kegeln geführt sind, berühren diese nach den Geraden, welche als Horizontalprojektionen A H′, A J′ haben. Diese Geraden A H′, A J′ sind auch die Risse

---

*) Man sehe Hachette, Traité de géométrie descriptive. Livre II. Probl. 6.

**) Daß man durch diese Gerade (B C, $b\ c$) eine tangirende Ebene zu dem Kegel führen könne, ist leicht einzusehen, denn die Gerade (B C, $b\ c$) berührt den Kegel offenbar in dem Punkte (H, h) des durch (p, P) gehenden Parallelkreises, welcher dem Hyperboloid und dem geraden Kegel gemeinschaftlich ist.

***) Durch den Punkt (B, b), in welchem die gegebene Gerade die Horizontalebene trifft, kann man zwey Tangenten zu dem Kreise W H′ ziehen; die zweyte Tangente aber wäre der Riß einer tangirenden Ebene zu der vorgelegten Fläche, welche durch die gerade Erzeugungslinie des Hyperboloids gienge, deren Horizontalprojektion die Tangente C D′ zu dem Kreise D G D′ wäre.

von vertikalen Meridianebenen, welche die Berührungspunkte der gegebenen Fläche und der verlangten Ebenen enthalten. Sind diese Meridianebenen bekannt, so konstruire man die Punkte (J, j), (H, h), wo sie die gegebene Gerade (B C, $b\ c$) schneiden, und ziehe sodann die Horizontalen $i\ n$, $h\ p$, so treffen diese die Tangenten $i\ p$, $k\ n$ in den Punkten n und p des hyperbolischen Zweiges $f\ p\ g\ n$.

Die tangirenden Ebenen zu der vorgelegten Fläche, deren Horizontalrisse B H′ B J′ bekannt sind, berühren diese Fläche in den Punkten (K, k), (Q, q), welche man bestimmt, wenn man durch die Punkte (H′, h'), (J′, j') die Tangenten zu den Meridianschnitten der Ebenen H′ A, J′ A zieht.

Es zu bemerken, daß, nachdem man die Punkte H′, O′ auf die Gerade L M nach h', o' projektirt hat, die vier Punkte h', h, q, v auf der nemlichen geraden Linie liegen müssen. Es verhält sich eben so mit den vier Punkten y, x, r, j, die auf der nemlichen Geraden y x liegen müssen.

Diese Auflösung, obgleich weniger scharf als die Vorhergehende, ist jedoch in der Praxis der geometrischen Zeichnung ganz anwendbar.

184. Wir haben als Horizontalrisse der tangirenden Ebenen an den Punkten (Q, q), (R, r) der Umdrehungsfläche die Geraden B J′, B H′ gefunden; ihre Risse auf der, zur Vertikalebene parallelen Meridianebene L′ M′ gehen durch schon konstruirte Punkte. In der That schneidet diese Meridianebene die gegebene Gerade in dem Punkt (S, s); die Tangente zu dem Meridianschnitt, welcher durch den Berührungspunkt (Q, q) geht, trifft die Umdrehungsaxe in dem Punkt (v, A), welcher in der Meridianebene L′ M′ liegt, daher ist die Gerade $v\ s$ auf dieser Ebene der Riß der tangirenden Ebene am Punkt (Q, q) der gegebenen Fläche. Diese verlängerte Gerade v s geht durch den Punkt w, der Vertikalprojektion des Punkts W, in welchen die Meridianebene L′ M′ den Horizontalriß B H′ der tangirenden Ebene schneidet. Von diesen drey Punkten v, s, w sind zwey hinreichend, um den Riß der ersten tangirenden Ebene auf der Meridianebene L′ M′ zu bestimmen. Was den Riß $s\ x$ der zweyten tangirenden Ebene an dem Punkt (R, r) der Umdrehungsfläche betrifft, so ist dieser ebenfalls durch die Projektionen s, x, t dreyer Punkte bestimmt, von denen der Erste auf der gegebenen Geraden liegt, der Zweyte in dem Durchschnitt der Umdrehungsaxe und der Tangente zu dem Meridianschnitt am Berührungspunkt (R, r), und der Dritte, in dem Zusammentreffen der Horizontalrisse B J′, L′ M′ der tangirenden Ebenen und der Meridianebene L′ A M′.

In Bezug auf das gewählte Beyspiel einer ringförmigen Umdrehungsfläche, müssen wir schließlich noch bemerken, daß die beyden tangirenden Ebenen, deren Risse

und Berührungspunkte wir bestimmt haben, nicht die Einzigen sind, die den Bedingungen der Aufgabe genügen; denn da der Meridianschnitt dieser Fläche aus zwey abgesonderten Zweigen besteht, so lassen sich zu den beyden Kurven $f p g$.., $i k o$.., außer den Geraden $p\ i$, $n\ k$ noch zwey andere gemeinsame Tangenten ziehen, welche zwey, auf entgegengesetzten Seiten der Umdrehungsaxe liegende Zweige jener Kurven berührten. Diese letzten Tangenten würden die Stellungen zweyer anderer, durch (B C, $b\ c$) gehender Ebenen bestimmen, welche die ringförmige Umdrehungsfläche in zwey Punkten ihrer Kehle berührten, und welche deßhalb zugleich auch durchschneidend zu der Fläche wären.

Zweyte Auflösung. (Taf. XVIII.)

185. Die Betrachtungen, auf welche sich die zweyte Auflösung der ersten Aufgabe d. Kap. gründet, lassen sich allgemein auf die Aufgabe anwenden: durch eine gegebene Gerade eine tangirende Ebene zu irgend einer krummen Fläche zu führen. Denn wenn man annimmt, die tangirende Ebene sey geführt, so wird man leicht einsehen, daß diese Ebene auch alle Kegelflächen berühren müsse, welche um die krumme Fläche umschrieben sind, und welche ihre Scheitel auf der gegebenen Geraden haben. Es folgt aber hieraus, daß die Berührungslinien der krummen Fläche und der umschriebenen Kegelflächen sämmtlich durch den Berührungspunkt der Fläche und der tangirenden Ebene gehen müssen, und daß man daher, um jenen Punkt zu finden nur nöthig habe, die Berührungslinien der Fläche und zweyer Kegel zu konstruiren, welche um die Fläche umschrieben sind, und welche ihre Scheitel auf der gegebenen Geraden haben. Die Punkte, in denen sich jene Linien selbst begegnen, sind die Berührungspunkte aller tangirenden Ebenen, welche durch die gegebene Gerade zu der vorgelegten krummen Fläche geführt werden können.

186. Um diese letzte Aufgabe in dem Falle zu lösen, wenn die vorgelegte Fläche eine Umdrehungsfläche ist, erinnern wir uns, daß die Umdrehungsflächen die Umhüllungen des Raumes sind, den ein gerader Kegel oder eine Kugel, beyde von veränderlicher Gestalt und Stellung, oder ein Cylinder, nur von veränderlicher Stellung durchläuft. (Art. 110.) Betrachten wir zuerst den geraden Kegel, welcher als Axe die Umdrehungsaxe hat, und dessen Erzeugungslinie eine Tangente zu dem Meridian der Fläche ist. Die Charakteristik der Umhüllung dieses beweglichen Kegels ist ein Kreis, und jede tangirende Ebene zu dem Kegel ist auch tangirend zu der Umdrehungsfläche; wenn man daher durch einen außerhalb der Fläche gegebenen Punkt A eine tangirende Ebene zu dem geraden Kegel führt, so berührt diese die Fläche in dem Punkt, in welchem die Berührungskante, die diesem Kegel entsprechende Charakteristik durchschneidet, und die Gerade, welche durch den Berührungspunkt und durch den Punkt A geht, ist offenbar eine Erzeugungslinie des zu der Umdrehungs-

fläche umschriebenen Kegels, dessen Scheitel in A ist. Auf dieselbe Art kann man jede beliebige Zahl Erzeugungslinien dieses letzten Kegels bestimmen; die Punkte, in denen sie die Umdrehungsfläche berühren, gehören der Berührungslinie dieser Fläche mit der ihr umschriebenen Kegelfläche an, deren Scheitel in A ist. Wenn man daher auf der gegebenen Geraden zwey Punkte nimmt, und die Kegelflächen konstruirt, welche diese Punkte als Scheitel haben, und welche um die Umdrehungsfläche umschrieben sind, so bestimmen die Durchschnitte der Berührungslinien der Kegel und der Umdrehungsfläche die Punkte, durch welche die verlangten tangirenden Ebenen gehen müssen.

Die Kugel, welche die Umdrehungsfläche nach einer kreisförmigen Charakteristik berührt, leitet zu dem nemlichen Resultat. Denn der Punkt auf der gegebenen Geraden, kann als Scheitel eines Kegels betrachtet werden, welcher die Kugel nach einem kleinen Kreise berührt. Dieser kleine Kreis und jener, nach welchem die Kugel die Umdrehungsfläche berührt, schneiden sich im Allgemeinen in zwey Punkten. Wenn man durch diese Punkte tangirende Ebenen zu der Kugel führt, so sind diese Ebenen auch zu der Umdrehungsfläche tangirend; da sie aber durch den auf der gegebenen Geraden genommenen Punkt gehen, so berühren sie die Umdrehungsfläche in Punkten, welche der Berührungslinie dieser Fläche mit der umschriebenen Kegelfläche angehören, deren Mittelpunkt auf der gegebenen Geraden genommen ist.

Da die Umdrehungsfläche die Umhüllung des Raumes ist, den ein Cylinder von unveränderlicher Gestalt durchläuft, dessen Grundlinie ein Meridianschnitt und dessen Erzeugungslinien senkrecht auf die Ebene dieses Schnittes ist, so kann man ebenfalls durch einen gegebenen Punkt außerhalb der Umdrehungsfläche tangirende Ebenen zu diesem Cylinder führen, und die Berührungskanten bestimmen: diese Kanten treffen den Meridian in Punkten, welche der Berührungslinie der Umdrehungsfläche und der Kegelfläche angehören, deren Mittelpunkt außerhalb der ersten Fläche gegeben wurde.

187. Es sey nun (A, $a\,a'$) (Taf. XVIII.) die vertikalstehende Axe der Umdrehungsfläche; in einer zur vertikalen Projektionsebene parallele Meridianebene A G sey die Ellipse $a\,o''\,a'\,o'$ deren große Axe mit der Vertikalprojektion $a\,a'$ der Umdrehungsaxe zusammenfällt, als Erzeugungsmeridian der Fläche gegeben; und (B C, $b\,c$) sey die gegebene Gerade, auf welcher ein Punkt (E, e) genommen sey, um als Scheitel eines um die Umdrehungsfläche umschriebenen Kegels zu dienen.

Nachdem man die Umdrehungsfläche durch eine Ebene $d\,d'$ senkrecht auf die Axe geschnitten hat, ziehe man an dem Durchschnittspunkt (D', d') des Meridians $a\,o\,a'\,o'$ mit der Horizontalebene $d\,d'$ die Tangente (D' A, $d''\,s$) zu diesem Meridian.

Diese Tangente schneidet die Axe (A, $a\,a'$) in einem Punkt (A, s); man nehme diesen Punkt als Scheitel eines geraden Kegels, welcher die Fläche nach dem Kreise vom Durchmesser $d\,d'$ berührt, und jede tangirende Ebene zu diesem Kegel wird auch berührend zu der Umdrehungsfläche seyn. Um eine solche Ebene durch den Punkt (E, e) zu führen, verbinde man diesen Punkt und den Scheitel (A, s) des geraden Kegels durch die Gerade (A E, $s\,e$), welche Gerade die Horizontalebene $d\,d'$ in einem Punkt (F, f) schneidet. Aus dem Punkt A als Mittelpunkt beschreibe man mit einem Durchmesser D D′ gleich $d\ d'$ einen Kreis D I D′, und ziehe aus dem Punkt F die Tangenten F J, F J′ an derselben; die Berührungspunkte J, J′ dieser Tangenten projektire man auf die Vertikalebene nach j, j', so gehören die Punkte (J, j), (J′, j') der Berührungslinie der gegebenen Umdrehungsfläche mit dem Kegel, dessen Scheitel in dem Punkt (E, e) der gegebenen Geraden liegt.

188. Man bemerkt hier, daß der Kreis vom Durchmesser $d\ d'$ keine Punkte der gesuchten Berührungslinie mehr enthalten könne, sobald der Punkt (F, f) innerhalb seines Umfanges fällt. Um aber nutzlose Konstruktionen zu vermeiden, ist es nothwendig, die Gränze der Kreise zu suchen, welche Punkte der Berührungslinie enthalten. Zu diesem Zwecke ziehe man aus dem Punkt (E, e) die Tangenten zu dem Meridian, dessen Ebene durch diesen Punkt geht. Die Parallelkreise der Umdrehungsfläche, welche durch die Berührungspunkte jener Tangenten gehen, sind die Gränzen der Kreise, welche Punkte der gesuchten Berührungslinie enthalten.

Lassen wir die Meridianebene A E eine Drehung um die Axe, von einem Bogen gleich E G machen, um diese Ebene auf die Meridianebene A G zurücklegen, wodurch der Punkt (E, e) die Stellung (G, g) auf der Horizontalen (A E, $e\ g$) nehmen wird. Durch den Punkt g ziehe man zwey Tangenten zu dem Meridian $a\ o\ a'\ o'$; und durch die Berührungspunkte i, i' führe man zwey Ebenen senkrecht auf die Axe (A, $a\ a'$); diese Ebenen schneiden die Umdrehungsfläche nach den begränzenden Kreisen der gesuchten Linie. Nimmt man die Abstände der Punkte i, i' von der Axe $a\,a'$, welche Abstände auf den Horizontalen $i\ k$, $i'\ k'$ gemessen werden, und trägt sie auf dem Meridian A E von A nach K und K′, projektirt sodann den Punkt K auf die Vertikalebene nach k, und den Punkt K′ nach k', so sind (K, k), (K′, k') die äußersten Punkte der Berührungslinie der Umdrehungsfläche und des Kegels, welcher seinen Scheitel in den Punkt (E, e) der gegebenen Geraden hat.

189. Um die vortheilhafteste Reihenfolge der graphischen Operationen zu beobachten, wird es gut seyn, von allen übrigen zuerst die Punkte (M, m) und (M′, m') zu bestimmen, welche auf dem größten Parallelkreis (O A′ O′, $o\ o'$) der Umdrehungsfläche

liegen. Nachdem man die Horizontalprojektion O A′ O′ dieses Kreises konstruirt, betrachte man dieselbe als Grundlinie eines vertikalen Cylinders, welcher die Umdrehungsfläche nach eben diesem Kreise (A′ O O′, *o o′*) berührt. Die zwey tangirenden Ebenen zu diesem Cylinder, deren Horizontalrisse die Geraden E M, E M′ sind, berühren die Umdrehungsfläche offenbar in den zwey Punkten (M, *m*), (M′, *m′*), und diese gehören daher der Berührungslinie des Kegels, dessen Scheitel in (E, *e*) ist und der Umdrehungsfläche an.

Der Meridian (O O′, *a o a′ o′*) kann als Grundlinie eines geraden horizontalen Cylinders betrachtet werden, der um die Umdrehungsfläche umschrieben ist; wenn man daher die Tangenten *e l*, *e l′* zieht, so berühren die tangirenden Ebenen zu dem Cylinder, deren Risse auf der Vertikalebene diese Tangenten sind, die Umdrehungsfläche in den Punkten, deren Projektionen *l* und L, *l′* und L′ sind, und welche ebenfalls der Berührungslinie angehören.

Nachdem man die sechs Punkte K, K′, L, L′, M, M′ der Horizontalprojektion der Berührungslinie bestimmt hat, und die sechs Punkte *k*, *k′*, *l*, *l′*, *m*, *m′* der Vertikalprojektion derselben Linie, konstruire man die Zwischenpunkte, nach der Methode, welche man angewendet hat, um die Punkte (J, *j*), (J′, *j′*) zu bestimmen.

190. Bisher wurde die Umdrehungsfläche als die Umhüllung des Raumes betrachtet, den ein gerader Kegel durchläuft, welcher die Tangenten zu einem Meridian nacheinander als Erzeugungslinien hatte. Wir wollen nun statt der Kegel Kugeln anwenden, welche zu Halbmessern die Stücke der Normalen zu dem Meridianschnitte haben, die zwischen dem Meridian und der Drehungsaxe gefaßt sind.

(A, *t*) sey der Mittelpunkt einer von diesen Kugeln, die Normale *d t* ihr Halbmesser und *d u d′ v* die Projektion eines ihrer größten Kreise. Die Meridianebene A E schneidet diese Kugel nach einem großen Kreise, und wenn man diese Meridianebene in die Stellung A G zurückgelegt annimmt, so fällt der Punkt (E, *e*) nach (G, *g*). Zieht man daher durch *g* die Tangenten *g u*, *g v* zu dem Kreise *d u d′ v*, so ist die Gerade *u v* der Durchmesser des Berührungskreises der Kugel und des geraden Kegels, dessen Scheitel in (E, *e*) ist. Dieser Kreis der Kugel und die Charakteristik (D J D′, *d d′*), nach welcher sie die Umdrehungsfläche berührt, schneiden sich nach einer horizontalen Geraden, welche senkrecht auf die Meridianebene A E, und unbestimmt in der Geraden *d d′* projektirt ist; wenn man daher den Abstand des Punktes *x′* von der Axe *a a′* von A nach *x* trägt, so ist die Senkrechte J *x* J′ auf die Gerade A E die Horizontalprojektion jener nemlichen Geraden. Der Durchschnitt der Senkrechten J *x* J′ mit dem aus

A als Mittelpunkt, und mit einem Durchmesser D D′ gleich $d\ d'$ beschriebenen Kreise, bestimmt die Punkte J′, J der Horizontalprojektion der gesuchten Berührungslinie.

Errichtet man die Vertikalen J′ j', J j, welche die Horizontale $d\ d'$ in den Punkten j', j treffen, so gehören diese letzten Punkte der Vertikalprojektion der Berührungslinie. Auf dieselbe Art läßt sich die erfoderliche Anzahl weiterer Punkte dieser Linie bestimmen.

191. Betrachten wir nun die Umdrehungsfläche als die Umhüllung des Raumes, den ein gerader Cylinder durchläuft, welcher nacheinander sämmtliche Meridianen zur Grundlinie hat, und suchen wir nach dieser Hypothese einen Punkt der Berührungslinie der Umdrehungsfläche und des Kegels, dessen Scheitel in (E, e) ist.

A N sey der Horizontalriß irgend einer Meridianebene, (N, n) der Fuß der Senkrechten, welche aus dem Punkt (E, e) auf diese Meridianebene A N gefällt ist. Nachdem man die Meridianebene A N um die Axe gedreht hat, bis in die, zur Vertikalebene parallele Stellung A G, so wird der Punkt (N, n) die Stellung (N′, n') nehmen. Durch n' ziehe man die Tangente $n'\ p'$ zu dem Meridian, und man trage die Entfernung $p'\ q$ des Berührungspunktes p' von der Axe $a\ a'$ auf dem Risse A N von A nach P. Der Punkt P und sein entsprechender p, welcher auf der Horizontalen $p'\ q$ liegt, sind die Projektionen eines Punkts der gesuchten Linie. Die Tangente $n'\ p$ ist der Riß einer tangirenden Ebene zu dem Cylinder, dessen Basis die Meridianlinie, und dessen Kanten senkrecht auf die Ebene dieser Linie sind.

Es ist einleuchtend, daß diese letzte Verfahrungsart so viele Punkte der gesuchten Linie gebe, als man aus dem Punkt n' Tangenten zu der Kurve $a\ o\ a'\ o'$ führen könne.

192. Nachdem man auf der Geraden (B C, $b\ c$) einen zweyten Punkt, ober- oder unterhalb des Ersten (E, e) genommen, betrachte man denselben als Scheitel eines zweyten um die Umdrehungsfläche umschriebenen Kegels und bestimme die Berührungslinie dieser beyden Flächen nach den so eben vorgetragenen Methoden. Diese zweyte Berührungslinie wird die erste in einem oder mehreren Punkten schneiden, und die Ebenen, welche durch jeden dieser Punkte und durch die gegebene Gerade geführt werden, berühren die Umdrehungsfläche in eben diesen Punkten.

Statt der zweyten Kegelfläche, welche die Umdrehungsfäche umhüllt, kann man eine Cylinderfläche anwenden, deren Kanten parallel zu der gegebenen Geraden sind; die Berührungslinie dieser Fläche und der Umdrehungsfläche enthält offenbar die Berührungspunkte, durch welche die tangirenden Ebenen geführt werden müssen. Das Verfahren, wodurch wir diese letzte Linie bestimmen werden, ist nichts weiter als eine Modifikation

des so eben erst angewendeten. Denn in der That, wenn man den Mittelpunkt der umschriebenen Kegelfläche im Unendlichen auf der gegebenen Geraden annimmt; so verwandelt sich der Umhüllungskegel in einen umhüllenden Cylinder, dessen Erzeugungslinien parallel zu der gegebenen Geraden sind.

193. Die Umdrehungsfläche wird nach der kreisförmigen Charakteristik ($d\ d'$, D H D′) durch einen geraden Kegel berührt, dessen Erzeugungslinie die Tangente $d\ s$ zu der Kurve $a\ o\ a'\ o'$, und dessen Scheitel in (A, s) ist. Die tangirende Ebene zu diesem Kegel, welche parallel zu der gegebenen Geraden ist, berührt die Umdreyungsfläche in einem Punkt, welcher der Berührungslinie dieser Fläche mit dem Cylinder angehört, dessen Erzeugungslinien parallel zu der gegebenen Geraden sind. Wenn man daher durch den Punkt (A, s) eine Parallele (A Z, $s\ z$) zu der Geraden (B C, $b\ c$) führt, und durch die Horizontalprojektion Z des Punkts, in welchem diese Parallele die Horizontalebene $d\ d'$ durchschneidet, zu dem Kreise D H D′ die Tangenten Z H, Z H′ zieht, sodann die Berührungspunkte H, H′ derselben auf die Horizontalebene nach h, h' projektirt; so hat man in (H, h), (H′, h') zwey Punkte jener verlangten Berührungslinie.

194. Die Umdrehungsfläche wird auch nach einer Charakteristik ($d\ d'$, D H D′) durch eine Kugel berührt, deren Halbmesser die Normale $t\ d$, und deren Mittelpunkt in (A, t) ist. Ein Cylinder, dessen Kanten parallel zu der Geraden (B C, $b\ c$) sind, umhüllt diese Kugel nach einem größten Kreise, dessen Ebene senkrecht auf die gegebene Gerade (B C, $b\ c$) ist. Wenn dieser Berührungskreis und die Charakteristik ($d\ d$, D H D′) sich in zwey Punkten schneiden, so gehören diese offenbar der Berührungslinie der Umdrehungsfläche und des Cylinders an, dessen Kanten parallel zu der gegebenen Geraden sind. Um diese Punkte zu finden, führe man durch irgend einen Punkt (A, s) der Axe (A, $a\ a'$) eine Parallele (A Z, $s\ z$) zu der Geraden (B C, $b\ c$). Man lege die Meridianebene A Z, in der diese Parallele enthalten ist, auf die Meridinanebene A G zurück, wo jene Gerade die Stellung (A Z′, $s\ z'$) nehmen wird. Durch die Projektion t des Mittelpunkts der Kugel fälle man sodann auf die $s\ z'$ eine Senkrechte t w′, welche die Horizontale $d\ d'$ in einem Punkte x'' schneidet; den Abstand dieses Punkts von der Axe $a\ a'$ trage man auf der A Z von A nach W, und errichte durch W auf A Z eine Senkrechte H W H′, welche den Kreis D H D′ in H und H′ schneidet, diese Punkte bringe man in der Vertikalprojektion nach h und h', so sind (H, h) und (H′, h') die verlangten Punkte.

195. Man erhält ebenfalls Punkte der gesuchten Berührungslinie, wenn man parallel zu der gegebenen Geraden tangirende Ebenen zu den Cylindern führt, welche zu

Grundlinien die Meridianschnitte in ihren verschiedenen Stellungen haben, und deren Kanten senkrecht auf die Ebenen dieser Schnitte sind.

Wählen wir als Beyspiel den Meridian, welcher in der Ebene A N enthalten ist; so wird die fragliche tangirende Ebene senkrecht auf die Ebene A N seyn, da sie aber außerdem noch parallel zu der gegebenen Geraden (B C, b c) seyn soll, so müssen ihre Risse auf der Ebene A N nothwendig parallel zu der Projektion der Geraden (B C, b c) auf der Ebene A N seyn. (Art. 177.) Diese Risse werden die Grundlinie des Cylinders, oder vielmehr den Meridian der Ebene A N in Punkten berühren, welche offenbar die verlangten sind.

Projektiren wir zuerst die Gerade (B C, b c) oder eine Parallele (A Z, s z) zu ihr auf die Meridianebene A N: der Punkt (A, s) ist seine eigene Projektion; ein anderer Punkt (Z, z) der nemlichen Geraden projektirt sich mittelst der Senkrechten (Z T, z d') auf die Meridianebene A N in einen Punkt dieser Ebene, dessen Horizontalprojektion T ist. Nehmen wir die Meridianebene A N in die Stellung A G zurückgelegt an, wobey der Punkt (A s) unveränderlich bleiben, und der in T projektirte Punkt die Stellung (T′, y) nehmen wird; so ist die Gerade (A T′, s y) die Projektion der (A Z, s z) auf der Ebene A N, nachdem diese die Stellung A G parallel zur vertikalen Projektionsebene genommen hat. Ziehen wir demnach zu dem Meridian a o a' o' die zu der Geraden s y parallelen Tangenten ζ ε, ϑ η und bestimmen ihre Berührungspunkte ζ, ϑ die Abstände dieser Punkte von der Axe a a', trage man sodann auf der Geraden A N von A nach λ und von A nach μ, so sind λ, μ Punkte der Horizontalprojektion der Berührungslinie der Umdrehungsfläche und des Cylinders, dessen Kanten parallel zu der gegeben Geraden (B C, b c) sind. Die Punkte λ, μ projektiren sich vertikal auf die Horizontalen ζ λ', ϑ μ' nach λ', μ' und diese Letzteren gehören der Vertikalprojektion derselben Linie.

Auch bey dieser Berührungslinie der Umdrehungsfläche und des Cylinders, dessen Kanten parallel zu der gegebenen Geraden sind, bemerke man vor allen, die Punkte, deren Vertikalprojektionen φ' ψ', ω π, γ', δ' sind. Die zwey ersten φ und π sind die Berührungspunkte des Meridians a o a' o' und der parallelen Tangenten zu der Geraden b c, der Vertikalprojektion der gegebenen Geraden, ω und μ gehören den Begränzungskreisen der zweyten Berührungslinie, und werden wie die Punkte k, k' der ersten Berührungslinie bestimmt. Die Punkte γ', δ' endlich entsprechen den Punkten γ, δ, welche auf einem Durchmesser γ δ gelegen sind, der senkrecht auf die Horizontalprojektion B C der gegebenen Geraden ist.

196. Die gegebene Umdrehungsfläche wird von einem Kegel, dessen Scheitel in (E, e) ist, nach einer Kurve (H H′ M M′ P, h h' m m' p') berührt, und von einem Cylinder, dessen Erzeugungslinien parallel zu der gegebenen Geraden sind, nach einer Kurve ($\alpha \beta \gamma \delta, \alpha' \beta' \gamma' \delta'$). Diese beyden Berührungslinien schneiden sich in zwey Punkten (α, α') und (β, β'); die Ebenen, welche durch jeden dieser Punkte und durch die gegebene Gerade (B C, b c) geführt sind, berühren die Umdrehungsfläche in eben diesen Punkten.

Es ist hierbey zu bemerken, daß die Projektionen der zwey Berührungslinien, zum Beyspiel die Vertikalprojektionen derselben, sich noch in Punkten kreuzen können, welche keinem ihrer Durchschnitte im Raume entsprechen; um diese von den Projektionen der wirklichen Durchschnittspunkte zu unterscheiden, erinnere man sich nur, daß jeder von diesen letzten Punkten α', in der Horizontalprojektion seinen entsprechendeu α, auf der nemlichen Vertitalen α' α haben müsse: und daß überdem diese Punkte auf den Projektionen der nemlichen zwey Bogen der Berührungslinien liegen müssen.

197. Von den drey Methoden, welche wir vorgetragen haben, wäre jede für sich hinreichend, um die krummen Linien zu finden, welche durch ihre Durchschnitte die Berührungspunkte der Umdrehungsfläche und der, durch die gegebene Gerade gehenden tangirenden Ebenen bestimmen. Um indessen die geraden Linien zu vermeiden, welche sich unter zu schiefen Winkeln schnitten, sieht man sich bey der Ausübung der zeichnenden Künste oft in die Nothwendigkeit versetzt, eine oder die andere Methode zu ergreifen, und in jedem besondern Fall diejenige zu wählen, welche die genauesten Konstruktionen giebt.

198. Die von uns als Beyspiel gewählte Umdrehungsfläche ist eine Fläche vom zweyten Grad, ein Ellipsoid. Wir haben (Art. 168.) gesehen, daß diese Flächen sämmtlich die Eigenschaft besitzen, von einer umschriebenen Kegelfläche nach einer ebenen Kurve berührt zu werden. Wenn man daher als Scheitel der umschriebenen Kegelfläche jene Punkte wählt, in denen die gegebene Gerade eine der Ebenen dnrchschneidet, welche durch zwey von den drey Hauptaxen (A, a a'), (O O′ o o') und (T T′, A′) (Art. 116) des Ellipsoids gehen, so sind die Projektionen der Berührungslinien dieser Kegel und des Umdrehungsellipsoids auf diesen Ebenen gerade Linien.

Man sieht wohl ein, daß durch die Benutzung dieser Eigenschaften die zu machenden Konstruktionen sich sehr vereinfachen lassen, indem man, in diesem Falle statt vier krummer Linien nur zwey zu konstruiren nöthig hat, und daß die Berührungspunkte (α, α'), (β, β') sich folglich aus den Durchschnitten zweyer geraden und zweyer krummen Linien ergeben. Im Allgemeinen aber sind die Berührungslinien krummer Flächen

mit umschriebenen Kegeln oder Cylindern, krumme Linien von doppelter Krümmung, welche in keiner Projektion gerade Linie seyn können.

Neunte Aufgabe.

Man soll parallel zu einer gegebenen Ebene eine tangirende Ebene zu einer gegebenen Umdrehungsfläche führen?

199. Auflösung. Es ist die charakteristische Eigenthümlichkeit der tangirenden Ebenen zu einer Umdrehungsfläche, daß sie senkrecht auf die Meridianebenen sind, welche durch ihre Berührungspunkte gehen. Sobald daher der Berührungspunkt gegeben ist, so bestimmt die Tangente zu dem Meridian, welchem dieser Punkt angehört, die Stellung der tangirenden Ebenen. Demzufolge denken wir uns aus einem beliebig genommenen Punkt der Umdrehungsaxe eine Gerade senkrecht auf die gegebene Ebene gefällt. Diese Senkrechte und die Axe bestimmen die Stellung einer Meridianebene, welche selbst senkrecht auf die gegebene Ebene ist, und welche diese Ebene nach einer Geraden, die Umdrehungsfläche nach einem Meridian schneidet. Wenn man zu diesem Meridian und parallel zu der geraden Durchschnittslinie der beyden genannten Ebenen eine Tangente zieht und durch ihren Berührungspunkt mit demselben eine tangirende Ebene zu der Umdrehungsfläche, so wird diese tangirende Ebene parallel zu der Gegebenen seyn, denn diese beyden Ebenen gehen durch zwey parallele Geraden und sind senkrecht auf eine nemliche Ebene.

Kann man zu dem Meridian noch mehrere Tangenten parallel zu der ersten ziehen, so bestimmen diese eben so viele tangirende Ebenen, welche sämmtlich der Aufgabe genug thun.

Da diese Auflösung keine Konstruktion erfordert, welche wir nicht schon angewendet hätten, so haben wir derselben keine Figur beygefügt.

Zehnte Aufgabe.

Man soll durch eine gegebene Gerade, eine tangirende Ebene zu einer gegebenen windischen Fläche führen?

200. Auflösung. A B C, $a\ b\ c$ (Taf. XIX.) seyen die Projektionen einer krummen Linie im Raume; der Kreis G E F sey die Grundlinie eines vertikalen Cylinders, auf welchem eine zweyte Krumme (G β E, $\alpha\ \beta'\ \gamma$) gegeben sey.

Denken wir uns eine bewegliche Gerade, welche sich auf diesen beyden Krummen,

als Leitlinien bewegt, und dabey beständig den vertikalen Cylinder berührt, auf welchem die zweyte Krumme gegeben ist, so wird diese Gerade eine windische Fläche erzeugen, und wir nehmen an, durch die gegebene Gerade (H K, h k) solle zu dieser Fläche eine tangirende Ebene geführt werden.

201. Um die Stellung irgend einer Erzeugungslinie der vorgelegten Fläche zu bestimmen, ziehe man durch die Horizontalprojektion β eines beliebig genommenen Punkts (β β') der zweyten Leitlinie eine Tangente zu dem Kreise G E F, und betrachte diese als unbestimmte Projektion einer tangirenden Ebene zu dem vertikalen Cylinder G F E. Diese Ebene schneidet die erste Leitlinie (A B C, a b c) in einem Punkt, dessen Projektionen B, b sind, und wenn man denselben Punkt mit dem erstgenommenen (β, β') durch eine Gerade (B β B', b β') verbindet, so ist diese eine Erzeugungslinie der vorgelegten windischen Fläche.

202. Dieses festgesetzt, bestimmen wir zuerst den Punkt (J, j), in welchem die gegebene Gerade (H K, h k) die windische Fläche durchschneidet.

Wenn man durch die Gerade (H K, h k) irgend eine Ebene führt, zum Beyspiel eine vertikale Ebene, so wird diese die windische Fläche nach einer gewissen krummen Linie schneiden; die gegebene Gerade, da sie mit dieser Linie in einer Ebene enthalten ist, wird dieselbe in einem oder in mehreren Punkten treffen, und dieses sind eben so viele Durchschnitte der gegebenen Geraden und der windischen Fläche.

Um die Linie zu finden, nach welcher die Vertikalebene H K die windische Fläche durchschneidet, und deren Horizontalprojektion unbestimmt in der Geraden H K enthalten ist, konstruire man die Stellung (B B', b b') einer Erzeugungslinie der Fläche; diese Linie (B B', b b') trifft die Vertikalebene H K in einem Punkt, dessen Projektionen R, r sind, und dieser Punkt, da er sowohl auf der Vertikalebene als auf der windischen Fläche gelegen ist, gehört ihrem gemeinsamen Durchschnitt an. Auf diese Weise bestimme man so viele Punkte r als man nöthig erachtet, und verbinde dieselbe durch die Krummen r j n, so hat man die Vertikalprojektion des gesuchten Durchschnittes. Die Geraden h k trifft diese Krumme j r n in einem Punkt j, welchen man auf die Gerade H K nach J projektire, um den Durchschnittspunkt (J, j) der gegebenen Geraden und der windischen Fläche zu erhalten.

203. Nachdem man die Erzeugungslinie (J E, j e) der Fläche konstruirt hat, welche durch jenen Durchschnittspunkt (J, j) geht, führe man durch die gegebene Gerade (H K, h k) und durch die gerade Erzeugungslinie (J E, j e) eine Ebene; und ich sage, daß diese die verlangte sey.

In der That, da die verlangte Ebene tangirend zu der gegebenen windischen Fläche seyn soll, so muß sie eine gerade Erzeugungslinie derselben enthalten; da sie aber auch durch die gegebene Gerade gehen soll, so kann sie nur diejenige von den Erzeugungslinien enthalten, welche durch den Durchschnittspunkt der windischen Fläche mit der gegebenen Geraden geht.

204. Was den Berührungspunkt der durch die gegebene Gerade gehenden tangirenden Ebene und der windischen Fläche betrifft, so würde man denselben am einfachsten nach der im Art. 131 et seq. Kap. II. angegebenen Verfahrungsart bestimmen.

Wir haben in der zu unsrer Aufgabe gehörigen Figur Taf. XIX. die Projektionen so vieler Erzeugungslinien konstruirt als erfoderlich waren, um die Gestalt der vorgelegten windischen Fläche auszudrücken. Auf der Horizontalebene sind alle diese Projektionen tangirend zu der Basis des Cylinders; auf der Vertikalebene sind sie sämmtlich berührend zu einer Krummen $\varphi\,\chi\,\psi$, welche die Gränze der Vertikalprojektion der windischen Fläche bildet.

Eilfte Aufgabe.

Man soll die Berührungslinie einer gegebenen windischen Fläche und eines Kegels, dessen Scheitel in einem gegebenen Punkt liegt, oder eines Cylinders, dessen Erzeugungslinie parallel zu einer gegebenen Geraden ist, konstruiren?

205. Auflösung. Jede Ebene, welche durch eine gerade Erzeugungslinie einer windischen Fläche geht, berührt diese Fläche, und man bestimmt den Berührungspunkt mittelst des Durchschnittes der geraden und der krummen Linie der windischen Fläche, welche in der tangirenden Ebene enthalten sind. (Art. 131.)

Nachdem man daher irgend eine Stellung der geraden Erzeugungslinie bestimmt hat, führe man durch diese Gerade und durch den gegebenen Scheitel des Kegels eine Ebene. Der Berührungspunkt dieser Ebene und der Fläche gehört der Berührungslinie der Fläche und des Kegels, und die Gerade, welche durch den Scheitel und den Berührungspunkt gezogen wird, ist eine Kante dieses Kegels. Man wiederhole diese Konstruktion so vielmal als man Kanten des gesuchten Kegels und Punkte seiner Berührungskurve erhalten will.

206. Um die Berührungslinie der windischen Fläche mit der Cylinderfläche zu erhalten, führe man durch die geraden Erzeugungslinien der windinschen Fläche Ebenen, welche sämmtlich parallel sind zu der gegebenen Geraden; diese Ebenen berühren die

Fläche in Punkten, welche der Berührungslinie der windischen Fläche und des Cylinders angehören, dessen Kanten parallel zu der gegebenen Geraden sind.

Zwölfte Aufgabe.

Man soll parallel zu einer gegebenen Ebene eine tangirende Ebene zu einer ebenfalls gegebenen windischen Fläche führen?

207. Auflösung. Man konstruire einen um die gegebene windische Fläche umschriebenen Cylinder, dessen Kanten parallel sind zu einer Geraden in der gegebenen Ebene, zum Beyspiel parallel zu ihrem Vertikalrisse, und man bestimme die Berührungslinie dieses Cylinders nach Art. 206.

Parallel zu einer zweyten Geraden der gegebenen Ebene, zum Beyspiel zu ihrem Horizontalrisse, führe man einen zweyten umhüllenden Cylinder zu der windischen Fläche, und bestimme die Berührungslinie.

Die zwey genannten Berührungslinien werden sich in einem oder in einer größeren Zahl von Punkten durchkreuzen, und die zwey Kanten der beyden Cylinder, welche durch jeden dieser Punkte gehen, bestimmen die Stellung einer Ebene, welche der Aufgabe genüget. Denn jede von diesen so konstruirten Ebenen geht durch zwey Tangenten zu der windischen Fläche, welche von einem nemlichen Punkte auslaufen, und überdies sind die beyden Tangenten parallel zu der gegebenen Ebene.

Noten zum zweyten Buch.

Note I.

Ueber die Cylinder- und Kegelflächen. Kap. I. Art. 58 — 61.

Lehrsatz.

Die Schnitte einer Cylinderflächen durch parallele Ebenen sind gleiche, sich deckende Linien.

Beweis. Es seyen A B C, *a b c* (Taf. XII. Fig. 3.) zwey parallele Schnitte eines Cylinders C a, A *a*, B *b* seyen zwey gerade Erzeugungslinien desselben, und A, *a*, B, *b*, die Begegnungspunkte dieser Erzeugungslinien, mit den Schnitten.

Man verbinde diese Punkte durch die Geraden A B, *a b*. Da sowohl die Erzeugungslinien A *a*, B *b*, als die Ebenen der Schnitte wechselsweise parallel sind, so sind auch die Sehnen A B, *a b* parallel und gleich.

Auf diese Art läßt sich die Gleichheit aller Sehnen beweisen, welche in beyden Schnitten die Punkte verbinden, die einer nemlichen Erzeugungslinie angehören. Wenn man daher in einem dieser Schnitte ein beliebiges Polygon einschreibt, so kann man in dem andern ein gleiches an Seiten und Winkeln einschreiben. Die Polygone müssen sich decken, und da die Scheitel ihrer Winkel Punkte der Schnitte sind, und überdem alle, in die Schnitte einschreibbare Polygone dieselbe Eigenthümlichkeit haben; so müssen auch die Schnitte gleich seyn und sich decken.

Zusatz. Da die parallelen Schnitte gleich sind, so sind auch alle ihre gleichnamigen Linien, und folglich die Tangenten A A′, *a a′*, welche durch die Punkte einer nemlichen Erzeugungslinien A *a* gezogen sind, parallel unter sich. Alle diese parallelen Tangenten A A′, *a a′*... liegen folglich in einer Ebene, welche die tangirende Ebene zu dem Cylinder an der Kante A *a* ist.

Lehrsatz.

Die Schnitte einer Kegelfläche durch parallele Ebenen sind ähnliche Linien.

Beweis. Es sey A (Taf. XII. Fig. 4.) der Mittelpunkt eines Kegels D C B, *d c b* zwey parallele Schnitte, und A B *b*, A C *c*, A D *d*, drey Erzeugungslinien desselben Kegels, welche diese Schnitte in den Punkten B, *b*, C, *c*, D, *d* treffen. Man verbinde in jeder Ebene diese Punkte durch die Sehnen B C, B D, *b c*, *b d*.

Die ähnlichen Dreyecke A B C und A b c, A B D und A b d geben:

$$AB : Ab :: BC : bc :: DB : db.$$

oder

$$BC : bc :: DB : db,$$

daher haben in den beyden Schnitten alle Sehnen, welche den nemlichen Erzeugungslinien entsprechen, das gleiche Verhältniß unter sich. Wenn man daher in einen Schnitt irgend ein Polygon eingeschrieben hat, so kann man stets in jedem parallelen Schnitt ein ähnliches Polygon einschreiben, und folglich sind diese Schnitte ähnliche Linien.

Zusatz. Alle Tangenten M N, m n, zu den parallelen Schnitten eines Kegels an den Punkten einer nemlichen Erzeugungslinie sind parallel unter sich. Alle diese parallelen Tangenten zusammen, bilden die tangirende Ebene an der Kante A C c.

Note II.

Beweis der doppelten Erzeugung des Hyperboloids von einem Netz durch die gerade Linie. Kap. II. Art. 119.

Es sey I K. (Taf. XII. Fig. 6.) eine bewegliche Gerade, welche sich beständig auf drey feste Gerade A B, M N, C D anlehnt, um ein Hyperboloid von einem Netze zu erzeugen. Betrachtet man blos das Flächenstück, was von den Seiten des windischen Vierecks A B C D eingeschlossen ist, so entsprechen alle Stellungen der beweglichen Geraden, solchen Geraden, welche wie I K, I′ K′, . . . ꝛc. die festen Leitlinien in drey Punkten I, G, K; I′, G′, K′, . . . ꝛc. schneiden. Die bewegliche Gerade I K und die feste Gerade M N, da sie in einer Ebene liegen, schneiden sich in einem Punkt G; aus dem nemlichen Grunde treffen sich die zwey Geraden I M, K N in einem Punkte L; aber die eine derselben liegt in der Ebene des Dreyecks A B D, und die andere in der Ebene des Dreyecks B C D, sie können sich daher nur in einem Punkte des Durchschnitts der Ebenen dieser zwey Dreyecke treffen, woraus folgt, daß der Punkt L in der Verlängerung der Diagonale B D des windischen Vierecks A B C D liege. Auf dieselbe Art ist es erweislich, daß die Geraden I′ M′, K′ N′ sich in einem anderen Punkt H der nemlichen Diagonale B D begegnen müssen. Die von dem Punkt L aus gezogenen Geraden L K, L M theilen die Seiten des Vierecks A B C D in acht Theile oder Segmente A I, I B, B N, N C, C K, K D, D M, M A. Wir werden beweisen: wenn man zwey derartige Produkte bildet, so daß die Faktoren eines jeden nur aus solchen Segmenten bestehen, welche keinen gemeinschaftlichen Endpunkt haben, diese Produkte gleich seyen.

Die Diagonale B D zerlegt das Viereck A B C D in zwey Dreyecke A B D, B C D; wenn man eines derselben, B C D zum Beyspiel auf die Seite setzt (Fig. 6. bis Taf. XII.) so ziehe man durch den Punkt D zu der Geraden K N L die Parallele D I; und verlängere dieselbe, bis sie die Seite B C des Dreyeckes in I trifft.

Vermöge der ähnlichen Dreyecke C K N, C D I erhält man:

$$CK : DK :: CN : NJ. \qquad (1)$$

Die zwey Dreyecke N B L, D B J geben:

$$BD : BL :: BJ : BN,$$

woraus $$BD + BL : BL :: BJ + BN : BN$$

oder $$DL : BL :: NJ : BN \qquad (2)$$

Multiplicirt man nach der Reihenfolge die Theilsätze der Proportionen (1) und (2), so hat man

$$CK \times DL : DK \times BL :: CN : BN;$$

Daher (Fig. 6.)

$$BN \times CK \times DL = BL \times CN \times DK. \qquad (a)$$

Betrachtet man das zweyte Dreyeck A B D des Vierecks und die Gerade L M, so hat man aus dem nemlichen Grunde

$$AI \times BL \times CM = AM \times BI \times DL. \qquad (b)$$

Wenn man die Gleichungen (a) und (b) gliederweise multiplicirt, so ergeben sich zwey gleiche Produkte, deren eines zu Faktoren die Segmente A I, B N, C K, D M hat, und das andere, die Segmente A M, B I, C N, D K; und jedes enthält nur solche Segmente, welche keinen gemeinschaftlichen Endpunkt haben.

Die Gleichheit dieser zwey Produkte giebt:

$$\frac{AI}{BI} \times \frac{CK}{DK} = \frac{AM}{DM} \times \frac{CN}{BN}$$

Da die Gerade M N fest ist, so hat man

$$\frac{AM}{DM} \times \frac{CN}{BN} = a \qquad (c)$$

a bezeichnet eine, durch die Stellung der drey festen Geraden, welche die bewegliche Gerade I K leiten, bestimmte unveränderliche Größe; woraus folgt, daß für alle Stellungen dieser Geraden

$$\frac{AI}{BI} \times \frac{CK}{DK} = a, \text{ oder } \frac{CK}{DK} = a\,\frac{BI}{AI} \qquad (d)$$

Dieses festgesetzt, wenn man die drey Geraden A D, I K, B C fixirt, um als Leitlinien der beweglichen Geraden M N zu dienen, so theilt diese Gerade in irgend einer Stellung die Seiten des windischen Vierecks ebenfalls in acht Segmente, zwischen denen bey allen ihren Stellungen die vorstehenden Verhältnisse (d) und (c) statt haben; das heißt, daß man bey allen Stellungen der beweglichen Geraden I K, M N auf gleiche Weise hat:

$$\frac{AI}{BI} \times \frac{CK}{DK} = a, \ (d) \qquad \frac{AM}{DM} = a\,\frac{BN}{CN} \qquad (c)$$

woraus folgt, daß es für das Hyperboloid von einem Netze zwey Erzeugungsarten giebt. Bey der einen stützt sich die bewegliche Gerade I K auf die Geraden A B, C D, M N, und bey der zweyten lehnt sich die bewegliche Gerade M N auf die Leitlinien A D, B C, I K. Es giebt daher keinen Punkt G dieser Fläche, durch den man nicht zwey Gerade M G N, I G K

führen könne, welche den zwey, den beyden Erzeugungsarten des Hyperboloids entsprechenden Systemen von Geraden angehören.

Note III.

Zu Art. 125. gehörig.

Lehrsatz.

Wenn zwey unter einander rechtwinklige Ebenen sich so bewegen, daß sie immer durch die Seiten eines nemlichen Winkels gehen, so beschreibt die gerade Durchschnittslinie dieser Ebenen einen schiefen Kegel.

Beweis. Es seyen O P, O Q (Taf. XII. Fig. 7.) die zwey Seiten eines Winkels, durch welche man zwey unter sich rechtwinklige Ebenen geführt habe, und O A sey die Projektion des Durchschnittes dieser zwey Ebenen auf der Ebene des Winkels P O Q. Nachdem man irgend eine Gerade D C senkrecht auf O A gezogen hat, betrachte man diese Gerade als den Riß einer Ebene, welche senkrecht auf den Durchschnitt der zwey rechtwinkligen Ebenen ist, und welche diese letzteren Ebenen nach zwey unter sich senkrechten Geraden schneidet, die durch die Punkte C und D gehen.

Man bildet dadurch im Raume zwey rechtwinklige Dreyecke, welche einen gemeinschaftlichen Scheitel auf dem geraden Durchnitte der beyden rechtwinkligen Ebenen haben, und als Hypothenusen die Geraden O D, D C. Es folgt aus diesem, daß der, den beyden Dreyecken gemeinschaftliche Scheitel in dem Durchschnittskreise von zwey auf O D und D C als Durchmessern beschriebenen Kugeln liegen müsse. Diese beyden Kugeln schneiden sich nach dem kleinen Kreise, dessen Ebene senkrecht ist auf jene des Winkels P O Q, und dessen auf die Seite O P dieses Winkels senkrechter Durchmesser die gemeinschaftliche Sehne der beyden großen Kreise D B O und C B D der Kugeln ist. Nun aber, welches auch die, in dem Winkel P O Q durch den Punkt D gezogene Sehne D C sey, so wird der kleine Durchschnittskreis der Kugeln, welche über D C und O D als Durchmesser beschrieben sind, sich nicht verändern, daher ist dieser kleine Kreis der geometrische Ort der Scheitel der rechtwinkligen Dreyecke, welche als Hypothenusen die Gerade von beständiger Länge O D und die veränderliche C D haben; daher kann man denselben als die Grundlinie eines schiefen Kegels betrachten, dessen Kanten die Durchschnitte von zwey rechtwinkligen Ebnenen sind, denen auferlegt ist, sich zwischen den Schenkeln eines gegebenen Winkels zu bringen.

Anstatt den festen Punkt D auf der Seite O Q des Winkels P O Q zu nehmen, könnte man denselben auf der Seite O P annehmen. Es läßt sich sodann auf dieselbe Art beweisen, daß der gerade Durchschnitt zweyer rechtwinkligen Ebenen, die sich zwischen den Seiten eines gegebenen Winkels bewegen müssen, einen schiefen Kegel erzeuge, der als Grundlinie einen Kreis hat, dessen Ebene senkrecht auf die Seite O Q des gegeben Winkels ist. Daher besitzt dieser schiefe Kegel so wie alle anderen Kegel des zweyten Grads die Eigenschaft, durch zwey Systeme von Ebenen nach Kreisen geschnitten zu werden. In diesem besondern Falle sind die schneidenden Ebenen senkrecht auf diejenigen Kanten des Kegels, die in der Ebene der Mittelpunkte der beyden kreisförmigen Grundlinien liegen.

Drittes Buch.

Durchschnitte der Flächen.

Erstes Kapitel.

Von den Durchschnitten der krummen Flächen und Ebenen.

208. Sind die Erzeugungen zweyer krummen Flächen vollkommen bestimmt und bekannt; hat, bey keiner von ihnen die Reihe aller Punkte des Raumes, durch welche sie geht, mehr etwas willkührliches; kann bey jedem dieser Punkte, sobald die eine der beyden Projektionen gegeben ist, stets die Andere konstruirt werden; und haben sodann diese Flächen einige Punkte im Raume gemein, so ist die Stellung aller dieser gemeinschaftlichen Punkte absolut bestimmt; sie hängt von der Gestalt der beyden krummen Flächen und von ihren respektiven Stellungen ab; und sie ist von solcher Beschaffenheit, daß sie immer aus der Erklärung der Erzeugung der Flächen hergeleitet werden kann, von der sie eine nothwendige Folge ist.

Die Reihe aller, zweyen bestimmten krummen Flächen gemeinschaftlichen Punkte, bildet im Allgemeinen im Raume eine gewisse krumme Linie, welche in ganz besonderen Fällen sich in einer gewissen Ebene befinden, und nur eine einzige Krümmung haben kann; welche in noch viel besonderern Fällen eine gerade Linie werden kann, ohne irgend eine Krümmung; welche endlich in noch unendlich besonderern Fällen sich auf einen einzigen Punkt beschränken kann; welche aber im allgemeinen Falle, eine krumme Linie von doppelter Krümmung ist.

209. Zwischen den Operationen der Analysis und den Methoden der darstellenden Geometrie herrscht eine Uebereinstimmung, von welcher hier nothwendig ein Begriff gegeben werden muß.

Wenn in der Algebra eine Aufgabe in Gleichungen gebracht ist, und man hat so viele Gleichungen als unbekannte Größen, so kann man stets die nemliche Anzahl von Gleichungen erhalten, bey denen, in einer jeden, nur eine unbekannte Größe vorkommt, wodurch man in den Stand gesetzt wird, die Werthe jeder dieser Größen zu erkennen. Das Verfahren, wodurch man diesen Zweck erreicht, und welches Eliminination genannt wird, besteht darinn, daß man mittelst einer Gleichung eine der Unbekannten aus allen übrigen Gleichungen wegschafft; und indem man auf solche Art die verschiedenen unbekannten Größen hinwegbringt, gelangt man zu einer Endgleichung, welche nur noch eine Einzige enthält, deren Werth sie hervorbringen muß.

Die Elimination in der Algebra hat die größte Aehnlichkeit mit den Operationen, mittelst welcher man in der darstellenden Geometrie die Durchschnitte krummer Flächen bestimmt.

In der That, nehmen wir an, daß man, einen Punkt im Raume betrachtend, und indem man durch x, y, z, die Abstände dieses Punkts von drey, unter sich senkrechten Ebenen vorstellt, ein wechselseitiges Verhältniß zwischen diesen drey Abständen festsetze; und daß dieses Verhältniß durch eine Gleichung ausgedrückt sey, in welcher die drey Größen x, y, z, nebst Konstanten vorkommen. Vermöge dieses Verhältnisses ist die Stellung des Punkts noch nicht bestimmt; denn die Größen x, y, z, können die Werthe ändern, und folglich der Punkt die Stellung im Raume, ohne daß das durch die Gleichung ausgedrückte Verhältniß zu bestehen aufhört, und die krumme Fläche, welche durch alle Stellungen geht, die der Punkt auf diese Weise einnehmen kann, ohne daß das Verhältniß zwischen jenen drey Coordinaten gestört werde, ist die, zu welcher die Gleichung gehört.

210. Nehmen wir zum Beyspiel an, eine Kugel, deren Halbmesser durch A ausgedrückt sey, habe ihren Mittelpunkt in dem gemeinschaftlichen Durchschnittspunkte von drey senkrechten Ebenen; und, indem man einen gewissen Punkt auf der Kugelfläche betrachtet, denke man sich aus diesem Punkt senkrechte Gerade auf die drey Ebenen gefällt, und durch die drey Buchstaben x, y, z, vorgestellt; so ist einleuchtend, daß der, nach dem betrachteten Punkt gerichtete Halbmesser der Kugel die Diagonale eines senkrechten Parallepipedums sey, dessen drey Kanten x, y, z sind; daß sein Quadrat gleich sey, der Summe der Quadrate der drey Kanten; und daß man demnach die Gleichung $x^2 + y^2 + z^2 = A^2$ erhalte. Dieses festgesetzt, wenn der Punkt die Stellung auf der Kugelfläche verändert, so ändern sich auch seine Abstände x, y, z, von den drey senkrechten Ebenen, aber sein Abstand vom Mittelpunkte ändert sich nicht, und die Summe der Quadrate der drey Coordinaten, welche immer dem Quadrate des Halbmessers gleich

bleibt, behält stets den nemlichen Werth; daher findet zwischen den drey Coordinaten dieses Punkts abermals das wechselseitige Verhältniß statt, was durch die Gleichung $x^2 + y^2 + z^2 = A^2$ ausgedrückt ist. Diese Gleichung, welche für alle Punkte der Kugelfläche gilt, und nur allein für diese, ist die Gleichung der Fläche. Alle krummen Flächen haben auf diese Art ihre Gleichungen; und wenn man diese Gleichungen auch nicht leicht immer in so einfachen Größen ausgedrückt erhalten kann, wie die Entfernungen x, y, z sind, so ist es doch stets möglich, dieselben in zusammengesetzteren Größen zu erhalten, wie die Neigungen der tangirenden Ebenen, die Krümmungshalbmesser u. dgl., für unsern Zweck war es hinreichend, eine als Beyspiel zur Kenntniß gebracht zu haben.

211. Hat man nun in x, y, z die Gleichungen zweyer verschiedenen krummen Flächen, in der Voraussetzung, daß für die Punkte der zwey Flächen die Abstände, in Bezug auf die nemlichen senkrechten Ebenen genommen seyen; und man eliminirt eine der drey Größen x, y, z, zum Beyspiel z aus den beyden Gleichungen, so setzt man durch die Gleichzeitigkeit der zwey Gleichungen vorerst fest, daß man sich weder ausschließlich mit allen Punkten der ersten Fläche beschäftige, noch mit allen Punkten der Zweyten, sondern blos mit jenen ihres Durchschnittes, für welche Punkte sämmtlich die beyden Gleichungen gelten, weil sie zu gleicher Zeit auf beyden Flächen liegen. Die Gleichung aus x, y, welche durch die Elimination von z entsteht, drückt sodann das Verhältniß aus, was für alle Punkte des Durchschnittes, zwischen diesen zwey Abständen statt hat, welches auch der Abstand z seyn mag, der verschwunden, und von dem in der Gleichung weiter keine Rede ist; sie ist daher die Gleichung der Projektion des Durchschnittes der zwey Flächen auf die den z senkrechte Ebene.

Man sieht hieraus, daß in der Algebra der Zweck der Elimination unter mehreren Gleichungen von drey Unbekannten, der ist, auf den drey Ebenen, auf welche aller Raum bezogen wird, die Projektionen der Durchschnitte der Flächen zu bestimmen, zu welchen die Gleichungen gehören.

212. Die Uebereinstimmung zwischen den Operationen der Analysis und den Methoden der darstellenden Geometrie beschränkt sich nicht blos auf das so eben Angeführte, sie herrscht überall. Wenn man im Raume, um irgend beliebige Erzeugungen zu bewirken, Punkte, Linien, Flächen sich bewegen läßt, so können diese Bewegungen immer durch analytische Operationen vorgeschrieben werden, und die neuen Gegenstände, zu welchen sie Veranlassung geben, sind selbst wieder durch die Resultate jener Operationen ausgedrückt. Umgekehrt, giebt es keine analytische Operation in drey Dimensionen, welche nicht die Urkunde (écriture) einer im Raume bewirkten, und von ihr diktirten

Bewegung sey. Um die Mathematik auf die vortheilhafteste Weise zu erlernen, muß sich demnach der Schüler frühzeitig gewöhnen, die Uebereinstimmung zu fühlen, welche die Operationen der Analysis und der Geometrie unter sich haben, er muß sich in den Stand setzen, eines Theils alle Bewegungen, die er sich im Raume zu denken vermag, analytisch aufzeichnen zu können, und andern Theils sich beständig im Raume das bewegende Schauspiel vergegenwärtigen, von dem jede analytische Operation die Urkunde ist.

213. Kehren wir zu unserm Gegenstande zurück, dieser ist nemlich die Konstruktionsart der Durchschnitte krummer Flächen. Wie wir im nächstfolgenden Kapitel sehen werden, hängt die allgemeine Lösung dieser Aufgabe von derjenigen ab, wenn die eine der sich durchschneidenden Flächen eine Ebene ist. Wir haben uns aus diesem Grunde hier vorerst mit der Bestimmungsart der ebenen Schnitte der krummen Flächen zu beschäftigen.

214. Die Durchschnittslinie einer krummen Fläche und einer Ebene, ist nichts Anderes, als die Reihe der Punkte, in denen die Erzeugunglinie der krummen Fläche, in ihren verschiedenen Stellungen die Ebene durchschneidet. (Art. 66.) Nun aber kann diese Erzeugungslinie entweder eine gerade Linie seyn, oder eine einfach gekrümmte, oder drittens eine krumme Linie von gedoppelter Krümmung; und die Aufgabe: den Durchschnitt einer krummen Fläche und einer Ebene zu konstruiren, kommt also darauf zurück, die Durchschnitte jener drey genannten Gattungen von Linien durch eine Ebene zu bestimmen.

215. Wenn die vorgelegte Fläche durch eine Gerade erzeugt wird, so suche man den Begegnungspunkt irgend einer Erzeugungslinie mit der durchschneidenden Ebene nach den bereits bekannten Methoden, und man hat einen Punkt der zu bestimmenden Durchschnittslinie.

Dieses Verfahren, bey einer hinreichend erachteten Anzahl von geraden Erzeugungslinien wiederholt, giebt bey einer jeden einen solchen Durchschnittspunkt; die Projektionen aller auf diese Weise gefundenen Punkte bilden eine horizontale und eine vertikale Kurve, es sind die Projektionen des Durchschnittes der krummen Fläche und der Ebene.

216. Hat die krumme Fläche zur Erzeugungslinie eine ebene Kurve, so trifft diese Linie in irgend einer ihrer Stellungen, die durchschneidende Ebene in einem, oder in einer gewissen Zahl von Punkten. Diese Punkte liegen aber sowohl in der Ebene der Erzeugungskurve, als auch in der durchschneidenden Ebene, wenn man daher die Gerade konstruirt, nach welcher diese beyden Ebenen sich schneiden, so wird diese letzte Gerade, die Erzeugungskurve, mit der sie in einer Ebene liegt in irgend einer Anzahl von Punk-

ten treffen, welches eben so viele Punkte des Durchschnittes der vorgelegten krummen Fläche und der Ebene sind.

217. Der dritte Fall und zugleich der allgemeinste ist derjenige, wenn die krumme Fläche durch eine Linie von doppelter Krümmung erzeugt ist. Um die Punkte zu finden, in denen eine solche Erzeugungslinie die durchschneidende Ebene trifft, wendet man ein ähnliches Verfahren an, wie bey den einfach gekrümmten Linien. Man versetzt die Linie von doppelter Krümmung auf eine Fläche, welche die Gerade zur Erzeugungslinie hat. Die durchschneidende Ebene wird diese Fläche nach einer krummen Linie schneiden, und da diese letzte Linie und die gegebene Erzeugungslinie, auf einer nemlichen Fläche liegen, so müssen sie sich in einer gewissen Anzahl von Punkten begegnen; diese Punkte sind dieselben, in denen die Erzeugungslinie von doppelter Krümmung die durchschneidende Ebene trifft. Die Auflösung dieses dritten Falles wird durch diese Behandlung auf die des Ersten zurückgebracht.

Eine jede krumme Fläche ist in der darstellenden Geometrie durch ihre beyden Projektionen gegeben, und mit diesen Projektionen zugleich auch zwey projektirende Flächen derselben Linie, welche Flächen, wie bekannt zu dem Geschlechte der Cylinder gehören. Man konstruire daher die Durchschnitte dieser projektirenden Flächen mit der gegebenen Ebene (Art. 215.); die Punkte, in denen die erhaltene Durchschnittslinie und die gegebene Erzeugungslinie sich treffen, und deren Projektionen in den nemlichen Senkrechten auf die Projektionsaxe liegen müssen, sind die Begegnungspunkte dieser Erzeugungslinie mit der durchschneidenden Ebene.

218. Wenn zwey Flächen nach Gestalt und gegenseitiger Stellung bekannt sind, so ist nicht nur die Linie ihres Durchschnittes im Raume bestimmt, sondern alle Eigenschaften dieser Linie fließen auch unmittelbar daraus her. Nehmen wir an, man verlange zum Beyspiel die Tangente an irgend einem Punkte einer Kurve, die aus dem Durchschnitte einer krummen Fläche und einer Ebene entstanden sey? —

Wenn man durch den angegebenen Punkt eine tangirende Ebene zu der krummen Fläche führt, welcher die vorgelegte Kurve angehört, so berührt diese Ebene die Durchschnittslinie in dem gegebenen Punkt, und sie enthält folglich die verlangte Tangente. (Art. 70.) Da aber die Tangente auch in der Ebene des Schnittes liegen muß, so kann sie keine Andere seyn, als die Gerade, nach welcher diese letzte Ebene und die genannte tangirende sich schneiden. Die in der Ebene der Durchschnittskurve und durch den Berührungspunkt gezogene Senkrechte auf die Tangente, wäre die Normale zu der Kurve an demselben Punkte.

Aufgaben über die Konstruktion der ebenen Schnitte krummer Flächen.

Erste Aufgabe.

Man soll den Durchschnitt einer gegebenen Cylinderfläche und einer Ebene von bekannter Stellung konstruiren?

219. Wir setzen zuerst voraus, daß, was immer thunlich ist, die Stellung der Projektionsebene so gewählt sey, daß die Eine senkrecht auf die Erzeugungslinie der Fläche sey, und die Andere senkrecht auf die durchschneidende Ebene, weil die Konstruktionen sich dadurch sehr vereinfachen. Wir werden sodann zur Uebung in den Projektionen die zwey Projektionsebenen auf beliebige Art gestellt annehmen.

220. Auflösung. Erster Fall: **Die Erzeugungslinie der Fläche ist senkrecht auf eine der Projektionsebenen, zum Beyspiel, auf die Horizontalebene, und die durchschneidende Ebene ist senkrecht auf die Andere genommen.**

Es sey (A, $a\,a'$) (Taf. XX.) eine zu der Erzeugungslinie der Cylinderfläche parallele Gerade; B C D E sey der Riß dieser Fläche auf der Horizontalebene, welcher zugleich die Projektion der unbestimmten Fläche ist, und folglich auch die des zu suchenden Durchschnitts; $f\,g$ sey die Vertikalprojektion der durchschneidenden Ebene, welche Projektion zugleich die der verlangten Durchschnittslinie ist; und die Senkre F G auf die Projektionsare L M sey der Horizontalriß derselben Ebene. Wenn man zu der Kurve B C D E und senkrecht auf L M die unbestimmten Tangenten E e'', C c'' zieht, so sind die Geraden $e\,e''$, $c\,c''$ die Projektionen der Erzeugungslinie in ihren äußersten Stellungen. und die Punkte e', c', in welchen sie die Projektion $f\,g$ der durchschneidenden Ebene treffen, begränzen auf der $f\,g$ die Vertikalprojektion des verlangten Durchschnitts.

Dieses festgesetzt, wenn man durch einen beliebig genommenen Punkt (H, i') des Durchschnittes eine Tangente zu diesem Schnitte führen will; so ist diese Tangente einmal in der durchschneidenden Ebene enthalten, und ihre Vertikalprojektion ist folglich die Gerade $f\,g$, sie muß aber auch in der tangirenden Ebene zu der Cylinderfläche enthalten seyn (Art. 218.), ihre Horizontalprojektion ist daher dieselbe wie die der tangirenden Ebene, nemlich die Gerade F H N, welche den Riß B C D E in H berührt. Somit ist, in Bezug auf den verlangten Durchschnitt, alles bestimmt.

221. Nehmen wir nun an, diese Durchschnittslinie solle, so wie sie wirklich in ihrer Ebene vorhanden ist, konstruirt, und durch irgend einen ihrer Punkte eine Tangente zu ihr gezogen werden.

Sollte die Vertikalebene zu weit von der Krummen B C D E abstehen, so kann

man eine zu ihr parallele und in das Innere der Linie B C D E gehende Vertikalebene annehmen, deren Horizontalprojektion die Parallele E C zu L M seyn soll. Diese Vertikalebene schneidet die durchschneidende Ebene nach einer Geraden, welche parallel zu ihrer Projektion $f g$ ist, und wir nehmen an, die durchschneidende Ebene drehe sich um dieselbe als Scharnier, um selbst vertikal zu werden, und die verlangte Linie in ihrer wahren Gestalt zu zeigen. Dieses festgesetzt, denken wir uns, durch eine beliebige Anzahl willkührlich auf B C D E genommener Punkte H...ꝛc. vertikale Ebenen senkrecht auf die vertikale Projektionsebene geführt, deren Risse H K, $i\ i'$ demzufolge senkrecht auf L M sind. Jede dieser Ebenen schneidet die durchschneidende Ebene nach einer, auf das Scharnier rechtwinkligen horizontalen Geraden (H i, i'); überdem trifft in jeder Ebene, diese horizontale Gerade das Scharnier in einem Punkte (J, i), und die Durchschnittslinie in zwey Punkten (H, i'), (K, i'); endlich ist diese Gerade mit allen ihren Theilen gleich ihrer Horizontalprojektion. Nun aber, wenn die durchschneidende Ebene sich um das Scharnier dreht, um vertikal zu werden, so bleiben alle diese Geraden, welche anfänglich horizontal waren, immer senkrecht auf das Scharnier und ändern ihre Größe nicht. Wenn man daher durch alle Punkte i'... auf $f g$ die unbestimmten Senkrechten $h\ k$.. errichtet, und auf denselben J H von i' nach h trägt, und J K von i' nach k, so erhält man eine beliebige Anzahl Punkte h..., k..., durch welche man die verlangte krumme Linie $e'\ k\ c'\ h$ gehen läßt.

Um durch einen beliebig genommenen Punkt h der in ihrer Ebene konstruirten Durchschnittslinie $e'\ k\ c'\ h$ eine Tangente zu führen, bringe man diesen Punkt in seine ursprüngliche Stellung (H, i') zurück; man erhält sodann die Horizontalprojektion der verlangten Tangenten, indem man die Gerade E N in H tangirend zu der Krummen B C D E führt. Wenn man einen beliebig genommenen Punkt (N, a') des Durchschnittes der tangirenden Ebene H N und der Ebene (G F, $f g$) auf die Vertikalebene E C zurücklegt, indem man auf $f g$ die Senkrechte $a'\ n$ zieht und auf derselben A N von a nach n trägt, so ist der Punkt n ein zweyter Punkt der verlangten Tangente, und diese ist folglich die Gerade $h\ n$.

222. Wir haben als Beyspiel einen geraden kreisförmigen Cylinder gewählt: der Schnitt desselben durch die gegebene Ebene ist eine Ellipse, deren Axen die Geraden $e'\ c'$, $b\ d$ sind. Welches übrigens die gegebene Linie B C D E seyn mag, so ist ersichtlich, daß der Durchschnitt $e'\ k\ c'\ h$ die Eigenthümlichkeit besitze, daß an irgend einem seiner Punkte die Subtangente $a'\ n$ gleich sey, der Subtangente A N des Ersten. Diese Eigenthümlichkeit, welche bey dem Kreise und der Ellipse, wenn diese Linien eine gemein-

schaftliche Axe haben, ganz bekannt ist, findet bey denselben nur darum statt, weil sie die Durchschnitte einer nemlichen Cylinderfläche durch zwey verschiedene Ebenen sind.

Aufwicklung des geraden Cylinders.

223. Nehmen wir an, man verlange die Aufwicklung der Cylinderfläche zu konstruiren, und auf derselben die erhaltene Durchschnittslinie zu verzeichnen.

Wenn man alle Kanten des Cylinders als eben so viele Scharniere betrachtet, um welche sich die Elemente der Fläche drehen, um sich nacheinander auf eine und dieselbe Ebene aufzulegen, so werden diese Kanten auch nach der Aufwicklung parallel unter sich seyn, und es ist einleuchtend, daß ein Schnitt des Cylinders, wie (B C D E, *e c*) dessen Ebene senkrecht auf seine Kanten ist, sich durch die Aufwicklung in eine gerade Linie verwandle. Denn die unendlich kleinen Bögen dieser Linie, welche auf jedem Element des Cylinders liegen, und welche man als geradlinig betrachten kann, sind senkrecht auf die parallelen Geraden, um welche sich diese Elemente drehen, sie fallen daher, nach der Aufwicklung, einer in die Verlängerung des andern, das heißt in eine gerade Linie.

Nachdem man sonach die Linie B C D E (Fig. 1.) mit allen ihren Abtheilungen auf eine Gerade R Q (Fig. 2.) aufgewickelt hat, und durch die Theilpunkte der R Q unbestimmte Senkrechte errichtet, so sind diese auf der Aufwicklung, die Stellungen der verschiedenen Kanten des Cylinders; und man braucht nur noch auf diesen Senkrechten die Theile der entsprechenden Kanten aufzutragen, welche zwischen dem senkrechten Schnitt (B C D E, *e c*) (Fig. 1.) und der durchschneidenden Ebene gefaßt sind. Nun aber sind diese Theile der Kanten gleich ihren Vertikalprojektionen, und diese Projektionen sind alle, einerseits an der Geraden L M, und andernseits an der Geraden *f g* begränzt. Wenn daher der Punkt H, zum Beyspiel, auf der Geraden R Q (Fig. 2.) nach S fällt und man trägt *i i'* auf der, durch S gehenden Senkrechten, von S nach T, so ist T auf der aufgewickelten Fläche der Punkt, in welchem die durch S gehende Kante von der durchschneidenden Ebene geschnitten wird. Die Linie X T Y Z, welche durch alle auf die nemliche Art bestimmten Punkte geht, ist die, in welche sich der vorliegende Schnitt durch die Aufwicklung verwandelt.

224. Es ist hier zu bemerken, daß obschon die Durchschnittsline des Cylinders und der Ebene eine geschlossene, in sich zurückkehrende Linie ist, sie sich durch die Aufwicklung doch in eine solche Linie verwandle, die sich in immer wiederholten Umwälzungen ins Unendliche erstreckt. Es ist in der That leicht einzusehen, daß man die Abtheilungen der Krummen B C D E (Fig. 1.) nach ihrer Reihenfolge unzählige male hintereinander auf der Geraden R Q (Fig. 2.) auftragen könne, und zwar nach den beyden

entgegengesetzten Seiten dieser Geraden; indem durchaus kein Grund vorhanden ist, aus welchem dieser Operation irgendwo eine Gränze angewiesen werden sollte. Durch jede so aufgetragene Länge der Linie B C D E (Fig. 1.) würde man auch wiederum einen neuen, dem schon gefundenen ganz ähnlichen Zweig der Aufwicklung des Schnittes (B C D E, e' c') erhalten.

225. Die angegebene Konstruktion der Figur 2 liefert ein eben so einfaches, als genaues Mittel, um auf einem, dem gegebenen Cylinder gleichen körperlichen Cylinder die Wirkung des Schnittes der Ebene (F G, f g) (Fig. 1.) aufzutragen. Denn man brauchte nur die ebene Fläche P Q P′ Q′ (Fig. 2.) dergestalt auf den körperlichen Cylinder aufzurollen, daß die Punkte P und Q in Einen zusammen fielen, so würde die Linie X T Y Z auf diesem Cylinder eine, dem Schnitte (B C D E, e' c'), (Fig. 1.) vollkommen gleiche krumme Linie bilden.

Es ist einleuchtend, daß wenn man die Tangente an dem Punkt (H, i') (Fig. 1.) verlängert, bis sie die horizontale Projektionsebene in einem Punkt F trifft, und sodann H F auf der R Q (Fig. 2.) von S nach U trägt; die Gerade T U Tangente zu der aufgewickelten Durchschnittslinie sey. Denn das Element, das irgend eine Linie einer aufwickelbaren Fläche mit ihrer Tangente gemein hat, verändert durch die Aufwicklung den Winkel nicht, den dasselbe mit der durch den Berührungspunkt gehenden Kante der Fläche macht; daher bleibt auch der Winkel, den die Tangente mit der Berührungskante bildet, sowohl auf der Fläche, als auf ihrer Aufwicklung unverändert.

Zweyter Fall. (Taf. XXI.)

Die Cylinderfläche und die durchschneidende Ebene sind in beliebiger Stellung gegen die Projektionsebenen angenommen.

226. Auflösung. Es sey (α β, α' β') eine Parallele zu der Erzeugungslinie der Cylinderfläche; A C B E der auf der Horizontalebene gegebene Riß derselben; und (H G, G f) die durchschneidende Ebene. Da die Neigung dieser Ebene gegen die Kanten des Cylinders durchaus in keiner Beziehung mit der vorliegenden Aufgabe steht, so haben wir diese Neigung rechtwinklig angenommen, und folglich die Risse H G, G f wechselsweise senkrecht auf α β, und α' β', um die aus dieser Annahme sich ergebenden Konstruktionen bey der Lösung der nächstfolgenden Aufgabe benützen zu können. Die Projektionen der begränzenden Kanten des Cylinders bestimme man wie bereits angegeben. (Art. 78.)

Nachdem dieses geschehen, denke man sich eine Reihe von Ebenen, welche sämmtlich parallel zu der Erzeugungslinie der Cylinderfläche, und senkrecht auf eine Projektions-

ebene sind, zum Beyspiel senkrecht auf die Horizontalebene. Jegliche von diesen Ebenen wird sich auf die Horizontalebene nach einer zu $\alpha\,\beta$ parallelen Geraden A C Q .... ꝛc. projektiren, und sie wird die Cylinderfläche nach zwey Erzeugungslinien schneiden, welche die Horizontalebene in den Begegnungspunkten C, A der Geraden A Q und der Kurve A C B E treffen. Man erhält demnach die Vertikalprojektionen dieser nemlichen Erzeugungslinien, wenn man die Punkte A, C auf die Vertikalebene nach a und c projektirt, und durch diese letzteren Punkte zu $\alpha'\,\beta'$ die Parallelen $a\ i$, $c\ p$ zieht. Aber die Vertikalebene A C Q schneidet die gegebene Ebene nach einer Geraden, welche durch den Punkt (K, k) geht, und deren Vertikalprojektion die Gerade $k\ n$ ist. Um einen zweyten Punkt n dieser letzten Geraden zu finden, ziehe man durch einen willkührlich genommenen Punkt (F, f) des Risses G f eine in der Ebene (H G, G f) gelegene Horizontale (F N, $f\ n$); diese schneidet die Vertikalebene A C Q in einen Punkt, dessen Horizontalprojektion N ist, und als dessen Vertikalprojektion man den gesuchten Punkt n findet. Die Begegnungspunkte i, p der Geraden $k\ n$ mit den Parallelen $a\ i$, $c\ p$ sind daher die Vertikalprojektionen derjenigen Punkte, in deren die Erzeugungslinien (A Q, $a\ i$), (C Q, $c\ p$) die Ebene (H G, G f) treffen: man bringe diese Punkte in Horizontalprojektion nach J, P, und man hat die Projektionen zweyer Punkte der zu bestimmenden Durchschnittslinie.

Ist die Richtung $n\ k$ der Vertikalprojektion eines Schnittes der angenommenen Hülfsebenen und der Ebene (H G, G f) einmal bekannt, so ergeben sich die Punkte beyder Projektionen der gesuchten Durchschnittslinie auf sehr einfache Art. Man braucht nur die Punkte K, O, ... ꝛc. in denen die verschiedenen Vertikalebenen A Q, E K ... ꝛc. den Riß H G treffen, auf die Vertikalebene zu projektiren, wodurch man eine Reihe von Punkten K, O ... ꝛc. erhält, und durch die Letzteren zu $n\ k$ die Parallelen $o\ m$ .... ꝛc. zu ziehen; die Begegnungspunkte einer jeden Parallelen mit den entsprechenden Projektionen $b\ l$, $c\ m$ der Kanten des Cylinders bringe man in Horizontalprojektion auf die zugehörigen Geraden E K ..., so erhält man die weiteren Punkte (L, l), (M, m) .... ꝛc. des verlangten Durchschnittes, dessen Projektionen I P L M, $i\ m\ l\ p$ man verzeichnen kann, so wie man eine zureichende Zahl jener Punkte bestimmt hat.

227. Um die Tangenten zu diesen beyden Projektionen an den Punkten L, l zu erhalten, erinnern wir uns, daß diese Tangenten die Projektionen der Tangente zu der Durchschnittslinie sind. Da nun aber diese letzte Tangente sowohl in der durchschneidenden Ebene, als in der tangirenden Ebene zu dem Cylinder an dem Punkt (L, l) enthalten ist, so kann der Punkt zum Beyspiel, in welchem sie die Horizontalebene durchschneidet, kein anderer seyn, als der Begegnungspunkt der Horizontalrisse jener bey-

18

den genannten Ebenen, nnd wenn man die Projektionen dieses Begegnungspunktes mit den entsprechenden Punkten L, l verbindet, so hat man die verlangten Tangenten, oder die Projektionen der Tangente zu der Durchschnittslinie am Punkt (L, l). Aber die tangirende Ebene zu dem Cylinder an diesem Punkt hat als Horizontalriß die Tangente in D zu dem Risse A C D E. Man ziehe daher diese Tangente und verlängere sie bis zu ihrer Begegnung in H mit dem Risse H G; den Punkt H bringe man in Vertikalprojektion nach h; man ziehe die Geraden H L, $h\ l$, und man hat die verlangten Tangenten.

228. Nach dem (Art. 123. I.) Gesagten ist es ersichtlich, daß auf der Horizontal- und Vertikalebene die geraden Begränzungslinien der Projektion des Cylinders die respektiven Projektionen der Kurve (I M L P, $i\ l\ m\ p$) berühren müssen. Allein es ist eben so leicht einzusehen, daß die beyden, durch die Geraden $\gamma\ \mu$, $\delta\ \pi$ geführten Vertikalebenen tangirend zu dem gegebenen Cylinder seyen. Die Schnitte dieser Vertikalebenen und der Ebene (H G, G f) sind daher auch berührend zu dem Durchschnitte des Cylinders und derselben Ebene. Durch die Anwendung der genannten Vertikalebenen $\gamma\ \mu$, $\delta\ \pi$ erhält man sonach zu gleicher Zeit zwey Punkte (ϱ, ϱ') (ς, ς') des gesuchten Durchschnittes und die Tangenten ($\mu\ \varrho$, $\mu'\ \varrho'$), ($\pi\ \varsigma$, $\pi'\ \varsigma'$) an denselben Punkten.

229. Soll die Durchschnittslinie so konstruirt werden, wie sie in ihrer Ebene vorhanden ist; so nehme man die Ebene (H G, G f) sammt dem in ihr enthaltenen Durchschnitte um ihren Riß H G gedreht, und auf die horizontale Projektionsebene zurückgelegt an. Bey der Bewegung der Ebene wird jeglicher Punkt des Schnittes, zum Beyspiel der in L projektirte, den Umfang eines Kreises beschreiben, dessen Ebene vertikal ist, und unbestimmt in der Geraden B L O projektirt. Der Mittelpunkt dieses Kreises ist in O, und sein Halbmesser die Hypothenuse eines rechtwinkligen Dreyeckes, dessen Seiten O L und $l'\ l$ sind. Trägt man daher diese Länge auf der Geraden B L von O nach R, so ist R die Stellung des Punktes (L, l) der Durchschnittslinie des Cylinders, nachdem die Ebene derselben sich auf die horizontale Projektionsebene zurückgelegt hat. Die durch alle, auf ähnliche Art konstruirten Punkte gezogene Krumme R S Q Z ist diese Durchschnittslinie selbst in ihrer Ebene betrachtet.

Die Tangente an irgend einem Punkt R der Krummen R S Q Z ergiebt sich nach der einzigen Bemerkung, daß diese Tangente während der Bewegung der durchschneidenden Ebene nicht aufhört, durch den Punkt H zu gehen, wo sie die Horizontalebene durchschneidet: H R ist daher diese Tangente.

Mittelst der Zurücklegung der Ebene (H G, G f) auf die vertikale Projektionsebene

hätte man die, der Krummen R S Q Z ganz gleiche Krumme R′ T′ S′ erhalten, und zwar durch ein ganz ähnliches Verfahren.

Aufwicklung des schiefen Cylinders.

230. Wir haben bereits (Art. 223.) gesehen, daß bey der Aufwicklung irgend einer Cylinderfläche die Kanten derselben ihre parallele Stellung unter sich beybehalten. Es folgt aus diesem, daß jede Linie, welche die sämmtlichen Kanten einer Cylinderfläche unter einem nemlichen Winkel durchschneidet, sich durch die Aufwicklung der Fläche in eine gerade Linie verwandle. Die einfachste Linie dieser Art ist der gerade Schnitt des Cylinders, das heißt, der Schnitt durch eine auf die Erzeugungslinie der Fläche senkrechte Ebene. Dieser Schnitt wird in der Aufwicklung eine Gerade, welche die parallelen Kanten rechtwinklig durchschneidet. Wenn man daher diesen Schnitt des Cylinders auf einer Ebene rektifizirt und durch jeden seiner Punkte eine Gerade zieht, welche auf ihn senkrecht ist, so bildet das Ganze dieser senkrecht Geraden die vollständige Aufwicklung des Cylinders.

Es sey der (Taf. XXI. Fig 1.) gegebene schiefe kreisförmige Cylinder aufzuwickeln und die kreisförmige Grundlinie desselben auf die Aufwicklung überzutragen.

Nachdem man zu diesem Ende den geraden Schnitt (I L M P, $i\ m\ l\ p$), und die Zurücklegung R S Q dieses Schnittes auf eine der Projektionsebenen konstruirt hat, theile man die Kurve R S Q in Bögen V X, X Z, Y S.... V R, R Z, die klein genug sind, um von ihren respektiven Sehnen nicht bemerkbar zu differiren. Sodann trage man auf einer willkührlich gezogenen Geraden $q'\ q'$ (Fig. 2.) und von einem Punkt v dieser Geraden anfangend, auf einer Seite nacheinander die Theile V X, X Y, Y Z....2c. (Fig 1.) nach $v\ x$, $x\ y$, $y\ z$ (Fig. 2.); sodann die Theile V R, R Z....2c. (Fig. 1.) von v (Fig. 2.) nach $v\ r$, $r\ z$....2c. Die unbestimmte Gerade $q\ q'$ stellt die Rektifikation der Kurve R S Q (Fig. 1.) vor, wenn man nemlich diese Kurve als unendliche male in sich selbst zurücklaufend betrachtet.

Wenn man sofort durch die verschiedenen Punkte v, x, y... r, z...2c. der unbestimmten Geraden $q\ q'$ Senkrechte auf diese Gerade errichtet, so hat man die verschiedenen Kanten des Cylinders, die den Punkten V, X, Y.... R, Z... (Fig. 1.) entsprechen, und das Stück der Ebene der Fig. 2., was zwischen den zwey Senkrechten $q\ a$, $q'\ a'$ gefaßt ist, stellt das Stück der Aufwicklung des Cylinders vor, was einem Umlaufe der Kurve V R S Q (Fig. 1.) entspricht.

Wir haben den Punkt v (Fig. 2.) genommen, um den Punkt V (Fig. 1.), oder was das nemliche ist, den Punkt (P, p) vorzustellen; den Punkt r (Fig 2.) um den

Punkt R (Fig. 1.) oder den Punk (L, l) vorzustellen ꝛc. Um daher die Grundlinie A C D E des Cylinders auf die Aufwicklung überzutragen, braucht man nur die wahren Längen der Kanten des Cylinders, die zwischen der Grundlinie und dem geraden Schnitte gefaßt sind, auf die entsprechenden Senkrechten der Figur 2 aufzutragen; zum Beyspiel die Länge (P C, p c) von v nach c (Fig. 2) die Länge (L D, l d) (Fig. 1) von r nach d (Fig. 2) u. s. w., und man erhält jedesmal einen Punkt c, d . . . ꝛc. der übergetragenen Grundlinie.

Es ist einleuchtend, daß die solchergestalt erhaltene Linie a' l' d c a sich nach beyden Seiten ins Unendliche erstrecke. Das zwischen den Punkten a, a' gefaßte Stück dieser Linie entspricht einem Umlaufe der Kurve A C D E (Fig. 1).

231. Will man an irgend einem Punkt d der Kurve a' c' d c a (Fig. 2.) die Tangente erhalten; so ziehe man durch diesen Punkt die Senkrechte d r auf q q'; man bestimme sodann auf dem geraden Schnitte (Fig. 1) den Punkt (L, l), welcher dem Punkte r, (Fig. 2) entspricht, und indem man durch (L, l) die Erzeugungslinie des Cylinders führt, findet man den Punkt D der Grundlinie als entsprechenden Punkt des Punktes d (Fig. 2) der Aufwicklung. Ist dieses geschehen; so ziehe man in D die Tangente zu der Grundlinie A C E D, woraus man die Tangente (H L, h l) zu dem geraden Schnitte in (L, l) und die Tangente R H zu der Kurve R S Q ableitet.

Nun aber liegt die Tangente D H mit der Tangente (H L, h l) in einer nemlichen tangirenden Ebene zu dem Cylinder, und sie bildet mit der Geraden (L D, l d) ein in (L, l) rechtwinkliges Dreyeck, dessen Hypothenuse H D, und dessen eine Seite gleich H R ist. Man trage daher die Länge R H (Fig. 1) auf q q' (Fig. 2) von r nach h; und ziehe h d, so bildet man ein Dreyeck d r h gleich dem Dreyecke (D L H, d l h) (Fig. 1); und da der Winkel (H D L, h d l) der Erzeugungslinie und der Tangente sich durch die Aufwicklung des Cylinders nicht ändert, so ist einleuchtend, daß die Gerade h d (Fig. 2) Tangente in d zu der Kurve a' c' d c a sey.

Zweyte Aufgabe.

Man soll den Durchschnitt einer Kegelfläche durch eine gegebene Ebene konstruiren?

232. Auflösung. Wir nehmen als Beyspiel einen geraden kreisförmigen Kegel, und, um so einfach als möglich zu operiren, nehmen wir die horizontale Projektionsebene senkrecht auf die Axe des Kegels, und die vertikale Projektionsebene senkrecht auf die durchschneidende Ebene an.

Es sey (A, a) (Taf. XXII.) der Mittelpunkt der Kegelfläche; der aus A als Mittelpunkt beschriebene Kreis B C D Q sey der Schnitt des Kegels durch die horizontale Projektionsebene F d sey der vertikale Riß der durchschneidenden Ebene, und die Senkrechte F E auf die Projektionsaxe L M ihr horizontaler Riß. Man bestimmt die Gränzen $r\,a\,u$, $q\,a\,s$ der Vertikalprojektion des Kegels, indem man die Endpunkte R Q des zu L M parallelen Durchmessers des Kreises B C D Q nach r und q projektirt, und diese Punkte mit der Projektion a des Mittelpunktes der Fläche verbindet.

Dieses festgesetzt, so sieht man sogleich, daß die zwey Punkte B, C, in denen sich die Risse des Kegels und der durchschneidenden Ebenen begegnen, nothwendig zwey Punkte ihrer gemeinschaftlichen Durchschnittslinie sind. Auf der Vertikalebene ist dieser Durchschnitt unbestimmt in der Geraden F d projektirt; aber die Punkte m und g bestimmen die Gränze dieser Projektion, man bringe daher dieselbe Punkte in Horizontalprojektion nach M und G auf der Geraden R Q, so hat man zwey weitere Punkte der Horizontalprojektion des verlangten Durchschnittes.

Um andere Punkte dieser Linie zu erhalten, konstruire man eine beliebige Zahl von geraden Erzeugunglinien (H K, $h\,k$), (H′ K′, $h\,k$) .... rc.; man bestimme die Punkte (I, i), (I′, i), in denen sie die durchschneidende Ebene treffen, so sind diese die gesuchten.

Die auf solche Weise erhaltene Durchschnittslinie besteht aus zwey, auf beyden Netzen der Kegelfläche gelegenen Zweigen (B J M C ... P G P′, F m ... $g\,d$). Aus der Stellung des Risses F d läßt sich schließen, daß der Kegel und die durchschneidende Ebene immer fortfahren werden sich zu durchschneiden, wie weit man sie auch verlängeren möge, und daß demnach die beyden Zweige ihres Durchschnittes sich ins Unendliche ausdehnen werden.

233. Um jedoch sogleich bestimmen zu können, ob die Durchschnittslinie eines Kegels und einer Ebene aus geschlossenen oder unendlichen Zweigen bestehe, bemerke man nur, daß dieser Umstand allein davon abhängt, ob die durchschneidende Ebene die sämmtlichen Kanten der Kegelfläche trifft, oder ob sie einer oder mehreren nicht begegnet, was aber nur alsdann geschehen kann, wenn diese Kanten parallel zu der schneidenden Ebene wären. Im ersten Falle wäre die Durchschnittslinie geschlossen, im andern Falle bestünde sie aus unendlichen Zweigen.

Um sofort zu finden, ob die vorliegende Kegelfläche Kanten habe, welche parallel zu der durchschneidenden Ebene sind, führe man durch den Mittelpunkt (A, a) der Fläche eine Ebene parallel zu der durchschneidenden. Diese Ebene schneidet in unserm Beyspiele den Kegel nach zwey Kanten (δ A, $\alpha\,a$), (β A,; $\alpha\,a$), welche sonach parallel zu der Ebene (E F, F d) sind, und von dieser letzteren nicht getroffen werden können,

außer im Unendlichen. Es folgt hieraus, daß die beyden Zweige der gesuchten Durchschnittslinie sich ins Unendliche erstrecken. Die Reihe von Erzeugungslinien, welche durch die Punkte des Bogens δ R β gehen, treffen die durchschneidende Ebene in den Punkten des Zweiges (B M C, F m). Die Erzeugungslinien hingegen, welche den Punkten des Bogens δ Q β entsprachen, bilden durch ihr Zusammentreffen mit der durchschneidenden Ebene den oberen Zweig (P G P′, g d) des Durchschnittes.

234. Man erhält die Tangente an irgend einem Punkte der gefundenen Durchschnittslinie, wenn man die Gerade konstruirt, nach welcher die tangirende Ebene an demselben Punkte des Kegels, der durchschneidenden Ebene begegnet.

Wenn, wie in unserem Beyspiele, die Durchschnittslinie der Kegelfläche und der Ebene aus unendlichen Zweigen besteht, so kann es seyn, daß diese Linie Tangenten habe, welche dieselbe an den Punkten im Unendlichen berühren, und welche man die Asymptoten des Schnitts nennt. Aber auch diese Tangenten sind nichts anderes, als die Durchschnitte der Ebenen, welche den Schnitt im Unendlichen berühren, mit der durchschneidenden Ebene.

Da wir nun die Erzeugungslinien (δ A, α a), (β A, α a) kennen, auf denen die Punkte im Unendlichen liegen, so können wir auch die tangirenden Ebenen an diesen Punkten konstruiren. Diese Ebenen haben haben als Horizontalrisse die Tangenten δ ζ, β π zu dem Kreise E C D Q an den Punkten δ, β. Diese Risse treffen den Riß E F in den Punten ζ, π, welche daher den Asymptoten des Schnittes angehören. Aber diese Asymptoten müssen wechselsweise parallel seyn, zu den Erzeugungslinien (δ A, α a), (β A, α a), weil die durchschneidende Ebene sowohl als die beyden tangirenden Ebenen, wechselseitig parallel zu diesen Erzeugungslinien sind. Daher endlich sind die Parallelen ζ ϑ, π φ zu den Projektionen δ A, β A die Horizontalprojektionen der gesuchten Asymptoten.

235. Will man die Zurücklegung der Ebene des Schnittes (B M C.. P G P′, F m.. g d) auf eine der Projektionsebenen konstruiren, um diesen Schnitt in seiner wahren Gestalt zu erhalten, so verfahre man auf dieselbe Weise wie bey den beyden vorhergehenden Fällen. In unserer Figur (Taf. XXII.) haben wir die Ebene des Schnittes als auf die vertikale Projektionsebene zurückgelegt angenommen, und die Kurve (b' m' c', p' g' p'') als die Gesuchte erhalten. Sollen die Asymptoten ζ' ϑ', π' φ' der in ihrer Ebene konstruirten Durchschnittslinie bestimmt werden, so sind für jede von ihnen zwey Punkte nöthig: man ziehe zum Beyspiel. ζ' F senkrecht auf F d und trage die Weite π F von F nach π'; die Weite ζ F von F nach ζ', ferner ziehe man p φ

ebenfalls senkrecht auf F d und bestimme auf derselben zwey weitere Punkte, deren Abstände von der Geraden F d auf der Vertikalen P P′ gemessen werden; so hat man das Gesuchte.

Aufwicklung des geraden kreisförmigen Kegels.

236. Bemerken wir vorerst, daß, wenn eine Kegelfläche sich aufwickelt, um eben zu werden, die geraden Linien dieser Fläche weder Gestalt noch Größe ändern, weil jegliche nach der Reihe das Scharnier wird, um welches die Aufwicklung sich bewerkstelliget: sonach bleiben alle Punkte der Fläche stets in der nemlichen Entfernung von dem Mittelpunkte. Wenn aber eine Kegelfläche gerade und kreisförmig ist; so sind alle Punkte der kreisförmigen Basis gleich weit vom Mittelpunkte entfernt; sie müssen daher auf der Aufwicklung abermals in gleicher Entfernung von dem Mittelpunkte seyn, und folglich auf einem Kreisbogen, dessen Halbmesser gleich ist, der beständigen Entfernung des Mittelpunktes der Fläche von ihrer kreisförmigen Grundlinie.

Hat man daher auf einer Ebene (Taf XXIII.) einen Punkt a genommen, um auf der Aufwicklung den Punkt (A, a) des (Taf. XXII.) gegebenen Kegels vorzustellen; und man beschreibt aus diesem Punkt als Mittelpunkt, und mit einem Halbmesser gleich $a\ r$ (Taf. XXII.) einem bestimmten Kreisbogen $q\ r\ q'$ (Taf. XXIII), so ist dieser Kreisbogen auch unbestimmt, die Aufwicklung der Grundlinie B C D des gegebenen Kegels (Taf. XXII.). Nehmen wir nun die beliebig gezogene Gerade $r\ a\ u$ (Taf. XXIII.) um die Kante (R A Q, $r\ a\ u$) (Taf. XXII.) vorstellen, und indem wir annehmen, die Fläche öffne sich nach der Kante (Q A R, $q\ a\ s$); trage man den Bogen R B Q auf den Bogen $q\ r\ q'$ (Taf. XXIII.) von r nach q und den Bogen R C Q (Taf. XXII.) von r (Taf. XXIII.) nach $r\ c\ q'$; ziehe sodann die Geraden $q\ a\ s$, $q'\ a\ s'$, so werden diese beyden Geraden der Kante (Q A R, $q\ a\ s$) (Taf XXII.) entsprechen, dergestalt, daß der Ausschnitt $a\ q\ q'$ die Aufwicklung des untern Netzes der Kegelfläche, und der Ausschnitt $a\ s\ s'$ die Aufwicklung ihres oberen Netzes vorstellt,

Um nun den Schnitt des Kegels durch die gegebene Ebene auf der Aufwicklung zu erhalten, fange man damit an, die verschiedenen Kanten der Kegelfläche übertragen. Zum Beyspiel, man trage den Bogen R H (Taf. XXII.) von r (Taf XXIII.) nach h und ziehe die Gerade $h\ a$, so hat man auf der Aufwicklung die Stellung der Kante (H A K′, $h\ a$) (Taf. XXII.) bestimmt. Auf dieser Kante liegt der Punkt (I, i) des Schnittes; man trage daher die Entfernung (I A, $i\ a$) = $a\ l$ dieses Punktes von dem Punkt (A, a) auf der $h\ a$ (Taf XXIII.) von a nach i, und man hat einen Punkt der übertragenen Durchschnittslinie. Durch diese, bey einer hinlänglichen Zahl von Punkten des Schnittes (B M C.. P G P′, F m,.. $g\ d$) (Taf. XXII.) wiederholte Opera-

tion erhält man die Uebertragung ($b\ m\ c \ldots g\ p\ d \ldots g'\ p'\ d'$) (Taf. XXIII.) dieses Schnittes auf der Aufwicklung.

Nach der Voraussetzung, daß die Kegelfläche (Taf. XXII.) sich an der Kante (Q A R, $q\ a\ s$) öffne, ist es ersichtlich, daß der obere Zweig des überzutragenden Schnittes sich auf der Aufwicklung des Kegels in zwey Theile $g\ p\ d$, $g'\ p'\ d'$ theilen müsse.

237. Die Asymptoten des Schnittes der Kegelfläche und der Ebene (G F, F d) (Taf. XXII.) trägt man auf die Aufwicklung (Taf. XXIII.) über, indem man sie als Tangenten an den Punkten des Schnittes im Unendlichen betrachtet. Nun sind aber die beyden Asymptoten in den tangirenden Ebenen zu dem Kegel in β und δ enthalten (Taf. XXII.), in welchen Ebenen auch die zu der durchschneidenden Ebenen parallelen Kanten (δ A, $\alpha\ a$), (β A, $\alpha\ a$) gelegen sind; die Asypmtoten werden folglich in der Aufwicklung weder ihre parallele Lage gegen diese Kanten, noch ihre respektiven Entfernungen von denselben verändern. Nachdem man daher auf der Taf. XXIII. (Fig. 1.) die Stellungen $\beta'\ a$, $\delta'\ a$ jener Kanten bestimmt hat, so ziehe man $\beta'\ \pi'$ senkrecht auf $\beta'\ a$; mache $\beta'\ \pi' = \beta\ \pi$ (Taf. XXII.) und ziehe $\pi'\ \varphi'$, so hat man die eine Asymptote übergetragen, und auf gleiche Weise bestimme man die Stellung $\zeta'\ \vartheta'$ der Zweyten. Diese so gefundenen Geraden $\pi'\ \varphi'$, $\zeta'\ \vartheta'$ sind beyde wiederum Asymptoten zu der Kurve $b\ m\ c$, und die Eine ist noch Asymptote zu dem Kurvenstück $g\ p\ d$, und die Andere zu dem Kurvenstück $g'\ p'\ d'$.

238. Um die beyden vorliegenden Figuren (Taf. XXII. XXIII.) möglichst deutlich zu machen, haben wir die Kegelfläche (Taf. XXII.) begränzt angenommen: einmal durch die horizontale Projektionsebene, und zweytens, durch die horizontale Ebene $s\ u$, deren Abstand vom Mittelpunkt (A, a) gleich A a ist, so, daß der Schnitt der Kegelfläche und dieser Ebene ein Kreis ist, vom Halbmesser $a''\ u = a\ q$, und dessen Horizontalprojektion mit dem Kreise B C D zusammenfällt. Es ist einleuchtend, daß die Aufwicklung dieses Schnittes $s\ u$ mit der Aufwicklung der Basis B C D in einen einzigen Umkreis zusammenfalle.

Wir haben ebenfalls die Aufwicklung $q\ r\ q'$ (Taf XXIII.) des Kreises B C D Q als an den Punkten q, q' begränzt angenommen, so daß der Bogen $q\ r\ q'$ einem Umlaufe des Kreises B C D Q entspricht. Diese Gränze ist jedoch offenbar ganz willkührlich und nur die erfoderliche Einfachheit der Zeichnung hat dazu bestimmt. Durch fortgesetzte Uebertragung der Punkte des Kreises B C D Q würde man auch immer wieder einen neuen Zweig der Aufwicklung des Schnittes (B M C.. P G P', F m. $g\ d$) erhalten haben, welcher dem schon gefundenen ganz gleich wäre, so daß die vollständige

Aufwicklung dieses Schnittes aus einer unendlichen Anzahl abgesonderter Zweige bestünde. Nur wenn der Bogen $q\ r\ q'$ (Taf. XXIII.) ein aliquoter Theil des ganzen Umkreises wäre, würde die Aufwicklung des vorliegenden Schnittes aus einer endlichen Anzahl abgesonderter Zweige zusammengesetzt seyn.

239. Die bisher angeführten Konstruktionen zu Bestimmung des verlangten Schnittes, der Tangenten und Asymptoten zu diesem Schnitte, und der Zurücklegung desselben würde bey jeder beliebigen Kegelfläche ihre Anwendung finden.

In Bezug auf den vorliegenden Fall haben diese Konstruktionen übrigens das Nachtheilige, daß die Kanten der gegebenen Kegelfläche die durchschneidende Ebene unter sehr spitzen Winkeln treffen, und daß daher sehr leicht eine Irrung in der Bestimmung der zu suchenden Punkte möglich ist. Diese Unrichtigkeiten lassen sich vermeiden, wenn man den gegebenen Kegel als durch einen Kreis erzeugt annimmt, und nach dieser Hypothese arbeitet.

Eine horizontale Ebene wie $l'\ \lambda'$ (Taf. XXII.) schneidet den Kegel nach einer kreisförmigen Erzeugungslinie (IItes Buch. Note I.), der Durchmesser dieses Kreises ist gleich $l'\ \lambda'$, und seine Horizontalprojektion ist der Kreis P Λ P′ von demselben Durchmesser. Nun aber schneidet die Ebene dieses Kreises die durchschneidende Ebene (E F, F d) nach einer Geraden (P p', p), welche den Kreis selbst in zwey Punkten (P, p), (P′, p) trifft, die deßhalb dem Durchschnitte des Kegels und der Ebene (E F, F d) angehören. Der Umkreis P Λ P′ entspricht als Horizontalprojektion zweyen kreisförmigen Schnitten des Kegels, deren Ebenen $l\ \lambda$, $l'\ \lambda'$ gleichweit vom Punkte (A, a) entfernt sind. Mittelst des zweyten Kreises findet man die Punkte (I, i), (I′, i) des unteren Zweiges der zu suchenden Durchschnittslinie.

Es ist hier noch zu bemerken, daß die beyden Kreise (P Λ P′, $l\ \lambda$), (P Λ P′, $l'\ \lambda'$) sich durch die Aufwicklung der Kegelfläche in zwey Kreise verwandeln, deren Durchmesser gleich $a\ l$ oder gleich $a\ l'$ sind, und deren Umfänge folglich in Eins zusammen fallen. Will man zum Beyspiel die Punkte (P, p), (P′, p) mittelst dieser Umkreise auf die Aufwicklung (Taf. XXIII.) übertragen, so hat man nur mit einem Halbmesser gleich $a\ l$ (Taf. XXII.) den Kreisbogen $l\ p\ p'$ (Taf. XXIII.) aus dem Mittelpunkte a zu ziehen, und auf demselben den Bogen Λ P (Taf. XXII.) von l nach p, und den Bogen Λ P′ (Taf XXII.) von l (Taf. XXIII.) nach p' zu tragen, und die Punkte p, p' sind bestimmt. Es ist leicht einzusehen, daß auf dem nemlichen Umkreise $l\ p\ p'\ t\ i'$ auch die Punkte i, i' des Zweiges $b\ m\ c$ liegen müssen, die den Punkten (I, i) (I′, i) (Taf. XXII. entsprechen.

Die Aufwicklung einer andern als geraden kreisförmigen Kegelfläche erfodert noch einige weitere Operationen, die wir im nächsten Kapitel (Art. 312.) vortragen werden.

Dritte Aufgabe.

Es ist eine Umdrehungsfläche und eine Ebene gegeben; man soll ihren wechselseitigen Durchschnitt konstruiren?

240. Auflösung. Die allen Umdrehungsflächen gemeinschaftliche Erzeugungslinie, und zugleich die einfachste aller krummen Linien, ist die Kreislinie. Bey ihrer Bewegung ist die Ebene dieser Linie immer senkrecht auf die Axe der Fläche.

Um daher die vorliegende Aufgabe mittelst der leichtesten Konstruktionen zu lösen, werden wir annehmen, die horizontale Projektionsebene sey so gewählt, daß sie senkrecht auf die Axe der Fläche ist, und die vertikale Projektionsebene sey senkrecht auf die durchschneidende Ebene. Dadurch werden sich die Parallelkreise der Fläche wiederum als Kreise von den nemlichen Durchmessern projektiren, und man erhält die Punkte des zu suchenden Durchschnittes, indem man die Begegnungspunkte der verschiedenen Parallelkreise und durchschneidenden Ebene bestimmt.

Erstes Beyspiel. (Taf. XXIV.)

241. Es sey (A, $a\ a'$) die vertikale Axe, und $a\ h\ a'\ f$ der Erzeugungsmeridian der Umdrehungsfläche, dessen Ebene P′ F parallel zur vertikalen Projekcionsebene ist; (D E, E g) sey die durchschneidende Ebene (D E ist senkrecht auf die Projektionsaxe).

Auf der vertikalen Projektionsebene ziehe man eine beliebige Anzahl von Geraden senkrecht auf die Projektion $a\ a'$; und indem man diese Geraden, als die unbestimmten Projektionen von horizontalen Ebenen betrachtet, verfahre man bey allen, wie wir es bey der Ebene $n\ n'$ angeben wollen. Diese Ebene schneidet die Umdrehungsfläche nach einem Kreise vom Durchmesser $n\ n'$, als dessen Horizontalprojektion man den Kreis N R O N′ findet. Die nemliche Ebene $n\ n'$ schneidet aber auch die Ebene (D E, E g) nach einer Geraden (R R″, r); und da nun diese beyden Schnitte sich selbst in zwey Punkten begegnen, deren Horizontalprojektionen R und R′ sind, so gehören diese dem zu konstruirenden Durchschnitte an. Man wiederhole dieses Verfahren, bey so vielen Ebenen $n\ n'$ als man Punkte nöthig hat, um die Horizontalprojection R′ X V Y jenes Durchschnittes zeichnen zu können.

Die Ebenen der horizontalen Schnitte, mittelst welcher sich auf diese Weise Punkte

R, R′ ... ꝛc. bestimmen lassen, sind zwischen den zwey Horizontalebenen $x x'$, $y y'$ eingeschlossen.

242. Betrachtet man auf einer Umdrehungsfläche das zweyte System von Erzeugungslinien, nemlich ihre Meridiane, so kann man auch die Punkte des verlangten Durchschnittes konstruiren, indem man die Begegnungspunkte der durchschneidenden Ebene und der verschiedenen Meridiane bestimmt.

Um diese zweyte Konstruktionsart anzuwenden, suchen wir die Begegnungspunkte, des in der Ebene A P enthaltenen Meridians mit der Ebene (D E, E g). Zu diesem Zwecke denken wir uns die Ebene A P, in die zur vertikalen Projektionsebene parallele Stellung A H zurückgelegt, mittelst einer Drehung um die Axe (A, $a\ a'$). In Folge dieser Bewegung wird die gerade Durchschnittslinie der Meridianebene A P und der Ebene (D E, E g) die Stellung (A P′, $k\ p$) annehmen, welche man bestimmt, indem man (A P′, $c\ p$) gleich A P macht, und den Punkt (P′, p) mit dem Begegnungspunkt (A, k) der Axe (A, $a\ a'$) und der Ebene (D E, E g) verbindet. Die so gefundene Gerade $p\ k$ begegnet der Projektion $a\ h\ a'\ f$ in zwey Punkten n, s. Die Abstände $n\ u$, $s\ t$ dieser Punkte von der Geraden $a\ a'$ trage man auf der A P von A nach R und S; und man hat in R, S zwey Punkte der Projektion R X V Y.

Der aus A als Mittelpunkt, und mit dem Halbmesser A P beschriebene Kreisbogen trifft den Riß D E der durchschneidenden Ebene in den Punkten P und Q. Zieht man A Q und betrachtet diese Gerade als die Projektion einer neuen Meridianebene, so erhält man zwey neue Punkte der Krummen R′ V X Y, indem man die nemlichen Abstände $n\ u$, $s\ t$ auf der Geraden A Q von A nach R′ und S′ trägt.

243. Man konstruirt die Tangente an einem Punkt (R, r) des Schnittes der Umdrehungsfläche und der Ebene (D E, E g), indem man gleich der bisher befolgten Methode den Punkt (K, k) bestimmt, in welchem sich die Risse der tangirenden Ebene zu der Umdrehungsfläche am Punkte (R, r), und der Ebene (D E, E g) kreuzen; und indem man diesen Punkt mit dem gegebenen Berührungspunkt verbindet.

Der Riß der fraglichen tangirenden Ebene wird gefunden, wenn man durch den Punkt (N, n), welcher den auf die Meridianebene H A F zurückgelegten Berührungspunkt (R, r) vorstellt, die Tangente (N J, $n\ i$) zu dem Meridiane zieht; sodann den Abstand $i\ c$ des Punkts, in welchem diese Tangente die Horizontalebene trifft von der Axe (A, $a\ a'$), auf der Geraden A R von A nach J trägt; und durch J die Senkrechte J K auf A R errichtet (Art. 89.). Diese Senkrechte trifft die Gerade D E in dem gesuchten Punkt K.

244. Die Durchschnittslinie der Umdrehungsfläche und der gegebenen Ebene durchschneidet auf der Fläche den größten Parallelkreis in den zwey Punkten (V, v), (V′, v). Es folgt hieraus, daß die Horizontalprojektion R′ X V Y der Durchschnittslinie, und die Horizontalprojektion H V F V′ des genannten Parallelkreises, welche die Begränzungslinie dieser Projektion der Fläche ist, sich selbst in den Punkten V, V′ wechselseitig berühren (Art. 128.).

Die in der Meridianebene H A F gelegenen Punkte (X, x), (Y, y) der Durchschnittslinie sind diejenigen, deren Höhen über der Horizontalebene ein Größtes und ein Kleinstes sind. Daher sind die Tangenten an diesen Punkten horizontal; in der Horizontalprojektion sind sie senkrecht auf die Projektionsaxe, und fallen mit den projektirenden Geraden der Punkte X, Y zusammen.

245. Man erhält die Durchschnittslnie der Umdrehungsfläche und der gegebenen Ebene in ihrer wirklichen Gestalt $\omega\ \varrho\ \chi\ \varrho'$, indem man jeden ihrer Punkte sich um den Riß E g drehen läßt, um sich auf die vertikale Projektionsebene aufzulegen. Jeder Punkt beschreibt bey dieser Bewegung einen Kreis, dessen Ebene, Mittelpunkt und Halbmesser bekannt sind, und woraus sich seine neue Stellung ergiebt.

Der gerade Durchschnitt (H F, E g) der Meridianebene H A F und der Ebene (D E, E g), auf die vertikale Projektionsebene nach $\chi\ \omega$ übergetragen, theilt die Linie $\varrho\ \chi\ \varrho'\ \omega$ in zwey symetrische Theile. Wenn man E $\varkappa$ senkrecht auf E g zieht und auf ihr die Weite E K von E nach $\varkappa$ trägt, sodann die Gerade $\varkappa\ \varrho$ zieht, so ist diese Tangente zu der Krummen $\chi\ \varrho\ \omega\ \varrho'$ an dem Punkt ϱ.

Zweytes Beyspiel. (Taf. XXV.)

246. Es sey (A, $a\ a'$) eine vertikale Axe, um welche sich eine Gerade (B C, $b\ c$) dreht, um eine Umdrehungsfläche zu erzeugen. Da diese Gerade mit der Axe nicht in einer Ebene ist, so wird durch ihre Bewegung ein Umdrehungs-Hyperboloid von einem Netze entstehen. (Art. 120.) Es sey (F G, G g) eine auf die vertikale Projektionsebene senkrechte Ebene, deren Durchschnitt mit dem Umdrehungs-Hyperboloid verlangt wird.

Man führe senkrecht auf die Axe eine beliebige Zahl von Ebenen. Irgend eine derselben wie $p\ i$ schneidet die Umdrehungsfläche nach einem Kreise (I J P, $p\ i$), dessen Mittelpunkt und Halbmesser durch die beyden Punkte (A, p'), (P, p) bestimmt sind, in denen die Ebene $p\ i$ die Axe (A, $a\ a'$) und die gerade Erzeugungslinie (B C, $b\ c$) durchschneidet. Dieser Kreis (I P J, $p\ i$) trifft nun die Ebene (F G, G g) in zwey Punkte (I, i), (J, i), welche auf der geraden Durchschnittslinie (I J, i) dieser letzten

Ebene und der Ebene $p\ i$ liegen. Diese Punkte gehören dem verlangten Durchschnitte an, dessen Horizontalprojektion I P K I′ man beschreiben kann, sobald man durch dieses wiederholte Verfahren die erfoderliche Anzahl von Punkten bestimmt hat.

Auf andere Weise betrachtet, kann man die Punkte dieser Projektion erhalten, indem man eine hinlängliche Anzahl Stellungen der geraden Erzeugungslinie (B C, $b\ c$) konstruirt, und die Punkte wie (H, h) bestimmt, in denen jegliche die durchschneidende Ebene trifft. Was die Konstruktion der Tangente an irgend einem Punkt (I, i) der gefundenen Durchschnittslinie, und die Zurücklegung $i'\ j'\ o'\ n'$ auf eine der Projektionsebenen anbelangt, so geschieht dieses ganz wie in dem vorigen Beyspiele.

247. Wenn man die Punkte der in Rede stehenden Durchschnittslinie verlangte, die in irgend einer Meridianebene, wie A G′ enthalten sind; so lassen sich diese Punkte auf folgende Art unmittelbar bestimmen.

Die Meridianebene A G′ wird von der gegebenen Ebene (F G, G g) nach einer Geraden geschnitten, welche in dem Punkt (A, α) die Umdrehungsaxe trifft. Betrachtet man diese Gerade als Erzeugungslinie eines geraden Kegels, welcher den Punkt (A, α) als Scheitel hat, und als Basis auf der Horizontalebene den Kreis vom Halbmesser A G′, dessen Endpunkt G′ durch das Zusammentreffen der Risse F G und O A N bestimmt ist, so werden dieser Kegel und das Hyperboloid, da sie die nemliche Axe haben, sich nach zwey Kreisen schneiden, und auf diesen Kreisen müssen die gesuchten Punkte liegen.

Um sofort die Stellung der genannten zwey Kreise zu finden, bestimme man die Durchschnittspunkte des Kegels und der geraden Erzeugungslinie des Hyperboloids in irgend einer ihrer Stellungen wie (B C, $b\ c$). Die Abstände dieser Punkte von der gemeinschaftlichen Axe sind gleich den Halbmessern jener Kreise.

Man findet die Durchschnittspunkte eines Kegels, und einer Geraden, wenn man durch den Mittelpunkt des Kegels und durch die Gerade eine Ebene führt, und die Kanten bestimmt, nach welchen diese Ebene den Kegel schneidet. Diese Kanten und die gegebene Gerade, da sie in einer nemlichen Ebene enthalten sind, werden sich selbst schneiden, und ihre Begegnungspunkte sind die gesuchten Durchschnitte des Kegels und der Geraden.

Man führe demzufolge durch den Mittelpunkt des Kegels eine Parallele (A E, α E′) zu der Erzeugungslinie (C B, $c\ b$). Die durch diese letzte Gerade, und durch ihre Parallele gehende Ebene schneidet die horizontale Projektionsebene nach einer Geraden, welche durch die Punkte C und E geht, und welche die kreisförmige Grundlinie des geraden Kegels in den Punkten S und T trifft. Die Kanten des Kegels, welche durch diese

Punkte gehen, begegnen der Erzeugungslinie (C B, $c\ b$) in zwey Punkten, von denen Q und R die Horizontalprojektionen sind. Die Parallelkreise der Umdrehungsfläche, die diesen nemlichen Punkten entsprechen, begegnen der Geraden (G′ A, G α) der durchschneidenden Ebene in den verlangten Punkten, die sich in N und O auf die Horizontalebene projektiren.

Vierte Aufgabe.

Man soll den Durchschnitt einer gegebenen windischen Fläche und einer Ebene konstruiren?

248. Auflösung. Erstes Beyspiel. Die windische Fläche, welche wir (Art. 104.) gerades Konoid genannt haben, wird durch eine bewegliche Gerade erzeugt, die sich auf zwey Leitlinien stützt, wovon Eine eine gegebene Kurve, und die Andere eine Gerade ist, und welche während ihrer Bewegung stets parallel zu einer auf der geraden Leitlinie senkrechten Ebene bleibt.

Es seyen die Vertikale (A, A′ a) (Taf. XXVI.), und die in der Vertikalebene L M gegebene Kreislinie B a C die Leitlinien einer beweglichen, beständig horizontalen Geraden, der Erzeugungslinie des geraden Konoids. Der Mittelpunkt A′ der kreisförmigen Leitlinie ist auf der Projektionsaxe angenommen; die zwey Horizontalen A B, A C sind folglich die Risse des Konoids auf der horizontalen Projektionsebene, und die Horizontalprojektionen aller übrigen Erzeugungslinien der Fläche gehen durch den Punkt A.

Dieses festgesetzt, so sey L′ M′ die unbestimmte Horizontalprojektion einer zur vertikalen Projektionsebene parallelen Ebene, man verlangt die Projektionen des Durchschnittes dieser Ebene und des Konoids; und die Tangente an einem Punkt der Durchschnittslinie, dessen Horizontalprojektion C sey?

249. Die gerade Erzeugungslinie des Konoids, welche durch den gegebenen Punkt geht, hat als Projektion auf der Horizontalebene die Gerade A P K; sie trifft die kreisförmige Leitlinie der Fläche in einem Punkt k; und sie hat folglich zur Vertikalprojektion die, durch k gezogene Horizontale $k\ k'$. Die aus P auf die Projektionsaxe errichtete Senkrechte P p trifft die Horizontale $k\ k'$ in einem Punkt p, welcher der Vertikalprojektion des Durchschnittes des Konoids und der Ebene L′ M′ angehört.

Auf dieselbe Weise konstruirt man jeden andern Punkt der Krummen D′ π' p E′, der Vertikalprojektion jener gesuchten Durchschnittslinie.

250. Die Tangente an dem Punkt (P, p) dieser Durchschnittslinie entspringt, wie bekannt, aus dem Durchschnitt der tangirenden Ebene an demselben Punkt des

Konoids und der durchschneidenden Ebene. Um die tangirende Ebene zu erhalten, werden wir, nach der wie Art. 154. vorgetragenen allgemeinen Methode, ein hyperbolisches Paraboloid konstruiren, welches die vorliegende Fläche nach der durch den Berührungspunkt (P, p) gehenden Erzeugungslinie (A P K, $k\ k'$) tangirt, und welches an allen Punkten derselben Erzeugungslinie einerley tangirende Ebene mit dem Konoid hat. Nun aber sind zwey gerade Leitlinien hinreichend, um jenes Paraboloid zu bestimmen, weil die gerade Erzeugungslinie desselben gleich jener des Konoids beständig horizontal bleiben muß. Als eine dieser Leitlinien kann man die Tangente $k\ h$ zu dem Kreise (B C, B a C) nehmen, die durch den Punkt k gezogen ist, wo die Gerade (A P K, $k\ k'$) diesen Kreis trifft. Außerdem ist die Gerade (A, A′ a) sowohl eine Linie des Konoids als auch ihre eigene Tangente, sie kann daher als die zweyte gerade Leitlinie des tangirenden Paraboloids betrachtet werden.

Diese beyden Leitlinien sind parallel zu der Vertikalebene L′ M′, die erste derselben, nemlich die Tangente $k\ h$ des Kreises B a C trifft die Horizontalebene in dem Punkt h, und folglich ist die Gerade A h der Riß des Paraboloids auf derselben Projektionsebene. Die gegebene Vertikalebene L′ M′ schneidet den Riß A h in dem Punkt G, dessen Projektion auf der Vertikalebene G′ ist; dieses bestimmt die zweyte, durch den Berührungspunkt (P, p) gehende gerade Erzeugungslinie (P G, p G′) des Paraboloids, und die Parallele N G O zu der Geraden A K als den Horizontalriß der tangirenden Ebene an dem genannten Punkt desselben Paraboloids. Diese tangirende Ebene wird durch die Ebene L′ M′ der Kurve D′ a E′ nach der Geraden (G M, G′ p) geschnitten, daher ist die Vertikalprojektion G′ p dieser Geraden Tangente zu der Krummen D′ a E′.

Auf dieselbe Art würde man die Tangente π' F′ an dem auf der Horizontalen $k\ k'$ gelegenen Punkt π' dieser Krummen bestimmen.

251. Man hätte als Leitlinien des, das Konoid nach der Geraden (A P K, $k\ k'$) berührenden Paraboloids auf die zwey Horizontalen (A h, h' h), (A A′, i) nehmen können. Die durchschneidende vertikale Ebene L′ M′ trifft die zweyte Leitlinie (A A′, i) in dem Punkt (I, i); die Gerade (G P I, G′ p i) die dem Paraboloid angehört, und welche die tangirende Ebene dieser Fläche an dem Punkt (P, p) bestimmt, geht daher durch den Punkt (I, i) und folglich muß auch die Tangente G′ p am Punkt p der Kurve D′ a E′ durch den Punkt i der Vertikalen A′ i gehen.

Zweytes Beyspiel.

252. Es seyen L M, L′ M′ Taf. XXVI. (Fig. 2.) die parallelen Risse zweyer Vertikalebenen; sie enthalten zwey Kreise von den Durchmessern A B, C D, deren Mit-

telpunkte α, β in einer Geraden α, β liegen, die schief auf die Risse L M, L′ M′ ist. Die Durchmesser A B, C D bilden mit den Geraden A C, B D ein Parallelogramm, das durch die zu A B parallele Gerade E F in zwey gleiche Theile getheilt ist. Durch die Mitte G′ dieser Geraden E F errichte man eine Senkrechte I G′ H N auf die Ebenen der zwey Kreise. Diese Senkrechte und die beyden Kreise seyen die Leitlinien einer windischen Fläche.

253. Eine zur vertikalen Projektionsebene parallele Ebene $l\ m$ schneidet die Fläche nach einer krummen Linie, die sich parallel zu ihr selbst nach $\gamma'\ p\ \omega\ \delta'$ projektirt.

Um diese Krumme zu konstruiren, führe man durch die horizontale Leitlinie I G′ H irgend eine Ebene. Diese wird die Vertikalebene L M nach einer Geraden H $k\ r$ schneiden, welche dem ersten Kreis, vom Durchmesser C D in einem Punkt (K, k) begegnet, und dem zweyten Kreis in einem Punkt (R, r). Diese beyden Punkte bestimmen die Stellung einer Erzeugungslinie (R K N, H K r) der Fläche. Die durchschneidende Ebene $l\ m$ trifft diese Gerade in einem Punkte (P, p), dessen Vertikalprojektion p der Krummen $\gamma'\ p\ \omega\ \delta'$ angehört. Man bestimmt auf diese Art so viele Punkte p diese Krummen als man verlangt, wobey noch folgendes zu bemerken ist: 1tens da auf der Vertikalebene die Projektionen der zwey kreisförmigen Leitlinien der Fläche sich in einen Punkt ω begegnen, welcher in der Verlängerung der Geraden I G′ H liegt, so müssen die Vertikalprojektionen aller Schnitte der windischen Fläche durch Ebenen, die zu den zwey Kreisen parallel sind, gleich der Kurve $\gamma'\ \omega\ \delta'$ durch den Punkt ω gehen: 2tens daß die horizontalen Erzeugungslinien A C, B D der Fläche durch die Vertikalebene $l\ m$ in den Punkten γ, δ geschnitten werden, deren Vertikalprojektionen $\gamma'\ \delta'$ sind.

254. Es sey (P, p) ein Punkt der Durchschnittslinie der windischen Fläche und der Ebene $l\ m$, und wir nehmen an, man verlange die Tangente an diesem Punkt des Durchschnittes.

Um die tangirende Ebene an demselben Punkt der Fläche zu erhalten, welche die verlangte Tangente enthält, konstruiren wir zuerst die Leitlinien eines Paraboloids, welches die vorliegende Fläche nach der bekannten durch (P, p) gehenden Geraden (R K N, H $k\ r$) berührt. Die zwey ersten Leitlinien, welche in den Ebenen der Kreise enthalten sind, sind die Geraden (L M, $k\ s$) und (L′ M′, $r\ t$); die dritte gerade Leitlinie des Paraboloids, die in einer zu den Ebenen der Kreise parallelen Ebene L″ M″ enthalten ist, geht durch den Punkt N dieser Ebene, in welchem die Erzeugungslinie der Fläche die horizontale gerade Leitlinie I K N derselben schneidet. Da die gesuchte dritte Leitlinie in der tangirenden Ebene zu der windischen Fläche an dem Punkt N enthalten seyn

muß, deren Risse auf beyden Projektionsebenen die Geraden N H l, H k r sind, so hat sie zu Projektionen die Geraden H k r und N L″ M″.

Da man nun die drey Leitlinien (L M, k s V), (L′ M′, r t U′), (L″ M″, H k r) kennt, so ist auch die Stellung einer Geraden, welche sich auf diese drey Leitlinien anlehnt, bestimmt, sobald man einen Punkt dieser Geraden auf der ersten Leitlinie giebt, zum Beyspiel den Punkt V, wo die Tangente k s die Horizontalebene trifft. Die Ebene, die durch diesen Punkt V, und durch die Leitlinie (L′ M′, r t) geführt ist, hat als Riß auf der Horizontalebene die Gerade U V O, welche die Gerade L″ M″ in dem Punkt O schneidet; diese Ebene schneidet folglich die Vertikalebene L″ M″ nach einer, durch diesen Punkt O gehenden Parallelen zu der Geraden (L′ M′, r t) Die Projektion dieser Geraden auf der Vertikalebene ist daher eine Parallele O′ x zu der Tangente r t U′ des Kreises A′ r B′, und geht durch den Punkt O′, der Projektion des Punkts O auf der Ebene L M. Diese Parallele O′ x schneidet aber die Projektion H k r der dritten Leitlinie (L″ M″, H k r) im Punkt x; daher schneidet die Ebene, deren Horizontalriß U V O ist, diese dritte Leitlinie in dem Punkt (X, x). Es ergiebt sich aus diesen Konstruktionen, daß die gerade Erzeugungslinie des Paraboloids, welche durch den Punkt V der ersten Leitlinie (L M, V k s) dieses Paraboloids und durch die zweyte Leitlinie (L′ M′, U′ r t) geht, als Horizontalprojektion die Gerade V X hat, und als Vertikalprojektion die Gerade V x; diese beyden Projektionen gehen von einem nemlichen Punkt V der Projektionsaxe L M aus. Diese gerade Erzeugungslinie (V X, V x) des tangirenden Paraboloids begegnet der zweyten Leitlinie (L′ M′, U′ r t) im Punkt (Q, q), welcher durch das Zusammentreffen, der im Punkt q sich kreuzenden bekannten Geraden U′ r t, V x bestimmt wird. Die Senkrechte q Q auf L M trifft die Gerade L′ M′ in dem Punkt Q, der in der Verlängerung der Geraden V X liegt.

255. Die Vertikalebene l m P, welche durch den Berührungspunkt (P, p) parallel zu den Ebenen L′ M′ der beyden Kreise geführt ist, schneidet das, die windische Fläche berührende Paraboloid ebenfalls nach einer geraden Erzeugungslinie (P G, p g); diese Gerade und die gerade Berührungslinie (R P K, r p k) bestimmen die tangirende Ebene am Punkt (P, p) des Paraboloids, und diese Ebene berührt zugleich die windische Fläche an demselben Punkt. Die Vertikalebene l m schneidet die windische Fläche nach einer Kurve, deren Vertikalprojektion γ' p ω δ' ist; der Durchschnitt derselben Ebene und der tangirenden Ebene am Punkt (P, p) ist die Gerade (G P, g p) und folglich ist die Vertikalprojektion g p derselben Tangente zu der Krummen γ' p ω δ' an dem Punkt p eben dieser Krummen.

Drittes Beyspiel. (Fig. 3. Taf. XXVI.)

256. Nachdem man senkrecht auf eine horizontale Gerade I H zwey Vertikalebenen geführt hat, deren Risse auf der horizontalen Projektionsebene die Senkrechten L M, L′ M′ auf die I H sind; denke man sich in der ersten Ebene einen Kreis, dessen Mittelpunkt in H ist, und welcher als Durchmesser die Gerade C D hat; in der zweyten Ebene sey ein anderer Kreis beschrieben, welcher als Sehne die Gerade A B hat, dessen Mittelpunkt in der Vertikalen (I, H φ) liegt, und welcher sich auf die Vertikalebene L M nach A′ φ B′ projektirt: die beyden Kreise und die Horizontale I H seyen die Leitlinien einer windischen Fläche.

257. Irgend eine durch die Horizontale H I geführte Ebene (I H, H k) schneidet die Kreise in zwey Punkten (K, k), (R, r); die in dieser Ebene enthaltene gerade Erzeugungslinie der Fläche hat zu Horizontal- und Vertikalprojektionen die Geraden r k, R K. Die verlängerte Horizontalprojektion R K begegnet der Horizontalen I H N in einem Punkt N, welcher der Erzeugungslinie (R K, r k) der Fläche angehört; jede andere Erzeugungslinie der Fläche trifft die Leitlinie I H in einem Punkt, den man auf dieselbe Weise bestimmt; die Vertikalprojektionen aller dieser Geraden laufen nach dem Punkt H zusammen.

258. Eine Vertikalebene l m schneidet die Gerade (R K, r k) in einen Punkt (P, p), welcher sich auf die Vertikalebene nach p projektirt; der Punkt (P, p) gehört der Durchschnittslinie der Fläche durch die Ebene l m an. Die Erzeugungslinien A C, B D der Fläche, welche auf der Horizontalebene gegeben sind, und nach einem Punkt der Horizontalen I H zusammenlaufen, bilden mit dem Durchmesser C D des kleinen Kreises und mit der Sehne A B des Größeren, das Trapez A B C D. Die Vertikalebene l m schneidet die Geraden A C, B D in den Punkten γ, δ, deren Vertikalprojektionen γ', δ' der Krummen γ' p ψ δ' angehören. Um den Punkt ψ dieser Krummen zu konstruiren, welcher auf der Verlängerung der Geraden I H liegt, trage man die Höhe H φ des Bogens A′ φ B′ auf der Geraden L′ M′ von I nach φ'; man verbinde φ' und den Endpunkt D des Halbmessers H D durch die D φ'; diese Gerade D φ' schneidet die Gerade l m in π, der Abstand π π' dieses Punkts von der Horizontalen I H ist gleich der Länge H ψ. Diese Konstruktionen werden deutlich werden, wenn man sich durch die Gerade I H eine Vertikalebene geführt denkt, welche die beyden Vertikalebenen der Kreise nach den Parallelen H D, I φ' schneidet, und die Fläche nach der Geraden D φ'. Es ist einleuchtend, daß die Vertikale π π' sich auf die Vertikalebene nach der Geraden H ψ projektire, und daß H $\psi = \pi$ π'.

259. Man bestimmt die Tangente ($G\,P$, $g\,p$) in irgend einem Punkt (P, p) der Durchschnittslinie ($l\,m$, $\gamma'\,p\,\psi\,\delta'$) durch dasselbe Verfahren, was für die vorstehende Figur angegeben wurde. Die auf diese Operation sich beziehenden Konstruktionen sind auf den Figuren 2 und 3 der Taf. XXVI. mit den gleichen Buchstaben bezeichnet.

260. Die zwey windischen Flächen, welche in den Figuen 2 und 3 der Taf. XXVI. vorgestellt sind, werden in der Baukunst bisweilen zur Konstruktion von kleinen Gewölben angewendet. Ersteres gehört zu den schrägen Tonnengewölben, letzteres zu den sogenannten Kernbögen. (In der französischen Schule sind sie unter dem Namen des biais passé und der arrière - voussure de Marseille bekannt.)

In den drey Figuren dieser Tafel haben wir nur die Projektionen derjenigen Theile der gegebenen windischen Flächen konstruirt, die sich unmittelbar auf unsern Gegenstand bezogen, weil eine weitere Ausdehnung dieser Flächen die Zeichnungen zu sehr überladen haben würde. Eben so haben wir der größeren Einfachheit wegen, zur Bestimmung der Tangenten zu den Durchschnitten dieser Flächen, die tangirenden Ebenen zu denselben nur mittelst der berührenden hyperbolischen Paraboloide konstruirt. Bey der allgemeinern Auflösung dieser Aufgabe mittelst eines die windische Fläche berührenden Hyperboloids von einem Netze, würde man übrigens ganz auf ähnliche Weise arbeiten.

Von den ebenen Schnitten einiger Flächen der zweyten Ordnung.

261. Der Schnitt irgend einer krummen Fläche der zweyten Ordnung durch eine Ebene gehört zu dem Geschlechte der Linien der zweyten Ordnung. Dieses Geschlecht besteht aus den drey krummen Linien, der Ellipse, der Parabel und der Hyperbel und es begreift als besondere Abarten: den Kreis, das System zweyer sich schneidenden oder parallelen Geraden, und den Punkt. Alle diese Linien haben so wie die krummen Flächen der zweyten Ordnung die Eigenthümlichkeit, von einer Geraden in nicht mehr als in zwey Punkten geschnitten werden zu können.

262. Es ist eine Folge dieser letzten Eigenthümlichkeit, daß jede Ebene, welche eine Fläche von der zweyten Ordnung nach einer Geraden schneidet, auch noch durch eine andere Gerade derselben Fläche gehen muß. Aus dieser Ursache können alle Flächen der zweyten Ordnung, welche die Gerade zur Erzeugungslinie haben, auf zwey verschiedene Weisen durch die Gerade erzeugt werden. Die Ebene, welche durch eine Gerade des ersten Erzeugungssystems geht, enthält nothwendig noch eine andere Gerade, die dem zweyten System angehört.

Unser Gegenstand in diesem Paragraphen ist hauptsächlich die geometrische Untersuchung der ebenen Schnitte derjenigen Flächen der zweyten Ordnung oder des zweyten Grads, welche durch die Gerade erzeugt werden können, und welche aus diesem Grunde am häufigsten in den technischen Künsten angewendet werden.

Von den Schnitten des elliptischen Kegels.

263. Der Kegel von kreisförmiger oder elliptischer Basis ist die einfachste Fläche der zweyten Ordnung, welche durch eine Ebene nach den drey krummen Linien, der Ellipse der Parabel und der Hyperbel geschnitten werden kann, weßhalb man diesen Linien auch insbesondere den Namen der Kegelschnitte gegeben hat.

Wir haben in der Aufgabe II. Art 232. gezeigt, auf welche Weise die Projektionen des Durchschnittes einer Kegelfläche und einer Ebene zu konstruiren seyen. Die verschiedenen Arten der Durchschnittslinie hängen blos von der Stellung der durchschneidenden Ebene ab. Bey dem Kegel des zweyten Grads läßt die besondere Art dieser Linie sich bestimmen, ohne hiezu erst ihre Projektionen selbst konstruirt zu haben.

264. Wenn der elliptische Kegel durch eine Ebene geschnitten wird, so sind entweder alle Kanten der Fläche von der durchschneidenden Ebene getroffen, oder es sind eine oder zwey Kanten des Kegels parallel zu dieser Ebene. Im ersten Fall ist der Durchschnitt offenbar eine geschlossene krumme Linie, eine Ellipse oder ein Kreis, im andern Fall, wenn gewisse Kanten des Kegels parallel zu der durchschneidenden Ebene sind, besteht die Durchschnittslinie aus einer oder aus zwey unendlichen Zweigen. Der Schnitt des Kegels von einem einzigen unendlichen Zweige, welcher nur auf einem Netze der Fläche liegt, ist eine Parabel; die Durchschnittslinie von zwey auf beyden Netzen gelegenen Zweigen ist eine Hyperbel.

265. Man erkennt, ob die Durchschnittslinie des Kegels und der Ebene sich ins Unendliche ausdehne, und auf welchen Kanten die Punkte im Unendlichen gelegen seyen, durch das in Art. 233. angewendete Verfahren, indem man durch den Mittelpunkt der Fläche eine Ebene parallel zu der durchschneidenden führt. Entweder begegnet diese Ebene der elliptischen Grundlinie nicht, oder sie schneidet sie in zwey Punkten, oder sie ist endlich tangirend zu der Fläche. Im ersten Fall hat die Kegelfläche keine Kante, welche parallel zu der durchschneidenden Ebene wäre, und der Schnitt ist eine Ellipse. Trifft die parallele Ebene die Grundlinie in zwey Punkten, so sind die, durch diese Punkte gehenden Kanten des Kegels parallel zu der durchschneidenden Ebene. Die Durchschnittslinie dehnt sich alsdann in zwey Zweigen auf den beyden Netzen der Kegelfläche ins Unendliche aus; sie ist eine Hyperbel. Im dritten Fall, wenn die parallele Ebene die Kegelfläche nach einer Kante berührt, so hat die Durchschnittslinie, die sich nur auf einem Netz der Kegelfläche ausdehnt, auch nur einen Punkt im Unendlichen, welcher auf der, zu der durchschneidenden Ebene parallelen Berührungskante liegt, sie ist eine Parabel.

266. Wenn man die Kanten des Kegels kennt, welche parallel zu der durchschneidenden Ebene sind, so ist es leicht, die Tangenten zu konstruiren, welche den Kegelschnitt an den Punkten im Unendlichen berühren, und welche die Asymptoten desselben heißen. Denn diese Asymptoten sind die Durchschnitte der durchschneidenden Ebene mit derjenigen, welche die Kegelfläche nach den, zu der durchschneidenden Ebene parallelen Kanten tangiren. (Art. 234.) Wenn der Schnitt eine Hyperbel ist, so hat der Kegel zwey, zu der durchschneidenden Ebene parallele Kanten; einer jeden Kante entspricht eine tangirende Ebene, welche der Durchschneidenden nach einer Geraden begegnet; die Hyperbel hat daher zwey Asymptoten.

Der Durchschnittspunkt der zwey Asymptoten ist der **Mittelpunkt** der Hyperbel; es ist einleuchtend, daß dieser Mittelpunkt auch zugleich der Begegnungspunkt der durchschneidenden Ebene und der geraden Durchschnittslinie der zwey Ebenen sey, welche den Kegel nach den beyden Kanten berühren, die zu der durchschneidenden Ebene parallel sind. Die Hyperbel nähert sich immer mehr und mehr ihren beyden Asymptoten so wie die durchschneidende Ebene sich mehr dem Mittelpunkt der Fläche nähert, und wenn diese Ebene durch den Mittelpunkt geht, so wird jeder Zweig der Hyperbel eine gerade Linie, oder mit andern Worten, die Hyperbel fällt mit ihren Asymptoten zusammen.

267. Der Schnitt des Kegels ist eine Parabel, sobald die durchschneidende Ebene und die Ebene, welche den Kegel nach der Kante berührt, die durch den Punkt im Unendlichen geht, parallel sind. Diese beyden Ebenen haben alsdann keine Punkte gemein, außer im Unendlichen; es folgt daraus, daß die Parabel keine Asymptote habe, oder vielmehr daß diese Asymptote sammt dem Mittelpunkt der Linie ganz im Unendlichen liege.

268. Alles bisher Gesagte über die krummen Linien, die aus dem Durchschnitt des Kegels von kreisförmiger oder elliptischer Grundlinie und einer Ebene entstehen, gilt sowohl von dem schiefen Kegel wie von dem geraden. Nehmen wir an, der gerade Kegel sey durch eine Ebene geschnitten; wenn man durch die Axe des Kegels eine zweyte Ebene senkrecht auf die erste führt, so liegt die gerade Durchschnittslinie dieser zwey Ebenen in der Richtung einer der Geraden, welche man die Axen des Kegelschnittes nennt. (Art. 114.)

269. Es sey B C D Q (Taf XXII.) die horizontale Grundlinie eines geraden Kegels, welcher durch die Ebene R Q, die durch die Axe (A, $a\ a'$) geht, nach zwey Kanten geschnitten wird, die sich auf die, zur durchschneiden Ebene parallele Vertikalebene nach $r\ a\ u$, $q\ a\ s$ projektiren. Es seyen F d, $n\ x$, $\omega\ \psi$, die Risse auf der Vertikalebene von drey, auf der vertikalen Projektionsebene senkrechten Ebenen. Der elliptische Schnitt ist in einer Ebene, wie $n\ x$; die Parabel in einer Ebene $\omega\ \psi$, welche parallel ist zu der in $q\ a\ s$ projektirten tangirenden Ebene des Kegels. Die Hyperbel ist in einer Ebene F $a\ d$ enthalten, welche die zwey Flächennetze des geraden Kegels schneidet. (R Q, n x), (R Q, $\omega\ \psi$), (R Q, F d) sind in dieser Figur parallele Gerade zu den Axen der drey Kegelschnitte der Ellipse der Hyperbel und der Parabel.

270. Die Ellipse, sie mag aus dem Schnitte eines Kegels oder eines Cylinders von kreisförmiger Grundlinie entstehen, ist in beyden Fällen eine Linie von derselben Art; wovon man sich überzeugen kann, wenn man die Ellipse mit dem Kreise vergleicht, der als Durchmesser die große Axe der Ellipse hat. Stellt man diese Vergleichung auf, so haben wir schon die Gleichheit der Subtangente des Kreises und der Ellipse bewiesen, wenn die Ellipse als Axe einen Durchmesser des Kreises hat. (Art. 222.)

Von den Schnitten der Kugel.

271. Wenn zwey Kugeln sich durchschneiden, so ist der Umfang ihres Durchschnittes eine Kreislinie; denn alle Punkte der Durchschnittslinie sind gleich weit von dem Mittelpunkt der ersten Kugel und gleich weit von jenem der Zweyten entfernt; sie sind daher in einer Ebene die senkrecht

ist, auf die Gerade, welche die Mittelpunkte verbindet, und in gleichem Abstande von dem Punkt, in welchem diese Ebene diese Gerade der Mittelpunkte schneidet. Sie gehören daher einem Kreise an, dessen Mittelpunkt auf der Geraden ist, die die Mittelpunkte der zwey Kugeln verbindet, und welche als Halbmesser die Senkrechte hat, die aus einem beliebigen Punkt des Durchschnittskreises auf die durch die Mittelpunkte der Kugeln gehende Gerade gefällt ist.

272. Eine Kugel von einem unendlichen Halbmesser ist eine Ebene. Eine Kugel und eine Ebene schneiden sich daher immer nach einem Kreise. Man kann diesen Satz direkt beweisen, wenn man annimmt, es seyen durch den Mittelpunkt der Kugel, und durch die Gerade, welche aus diesem Mittelpunkt senkrecht auf die gegebene Ebene gefällt ist, eine Reihe von Ebenen geführt, welche die Kugel nach größten Kreisen, und die Ebene nach Geraden schneiden. Betrachtet man blos die Stücke dieser Geraden, welche den großen Kreisen als Sehnen dienen, so gehören die Endpunkte dieser Sehnen dem Durchschnitte der Kugel und der Ebene an: nun aber sind in allen durchschneidenden Ebenen, die Sehnen der großen Kreise der Kugel, welche in der gegebenen Ebene liegen, von gleicher Länge; daher sind diese Sehnen die Durchmesser des kleinen Durchschnittekreises der Kugel und der Ebene.

Wenn demnach eine Ebene eine Kugel schneidet, so ist der Schnitt ein Kreis, welcher als Mittelpunkt den Fuß der Senkrechten hat, die aus dem Mittelpunkt der Kugel auf die Ebene gefällt ist. Umgekehrt, ist die Gerade, welche den Mittelpunkt einer Kugel und den Mittelpunkt eines kleinen Kreises dieser Kugel verbindet, senkrecht auf die Ebene des kleinen Kreises.

273. Wenn zwey Ebenen eine Kugel nach zwey kleinen Kreisen schneiden, so bestimmen die Mittelpunkte dieser Kreise und der Mittelpunkt der Kugel die Stellung einer dritten Ebene, welche senkrecht auf die beyden ersten ist. Dieser Satz ist eine Folgerung der Vorhergehenden, weil die Geraden, die durch den Mittelpunkt der Kugel und durch die Mittelpunkte der kleinen Kreise der Kugel gehen, senkrecht auf die Ebenen dieser kleinen Kreise sind.

274. **Durch zwey beliebige Kreise einer Kugel, kann man zwey schiefe Kegel führen.**

Man denke sich durch den Mittelpunkt O der Kugel und die Mittelpunkte E, F der zwey gegebenen Kreise, eine Ebene, welche die Kugel nach einem Kreise A B C D (Taf. XXIII. Fig. 2.) schneidet, und die Ebenen der gegebenen Kreise nach den Geraden A B, C D. Da die Sehnen A B, C D des großen Kreises A B C D die Durchmesser der gegebenen Kreise sind, so verbinde man die Endpunkte dieser Sehnen durch die Geraden A B, C D, welche sich in G begegnen, und durch zwey andere Geraden A D, B C, die sich im Punkt G′ kreuzen. Die Punkte G, G′ sind die Mittelpunkte zweyer schiefen Kegel, die durch die zwey Kreise geführt sind, welche als Halbmesser die Geraden A B, C D haben, und deren Ebenen senkrecht auf die Ebene der drey Mittelpunkte O, E, F sind. Um diesen Satz zu beweisen, nehmen wir die Eigenthümlichkeit des Kreises als bekannt an, daß, wenn eine Sehne und ein Durchmesser senkrecht unter sich sind, die Sehne den Durchmesser in zwey Theile theile, so daß die Hälfte der Sehne die mittlere Proportionale ist, zwischen den zwey Theilen des Durchmessers. Nachdem man die Gerade G I K gezo-

gen, welche die Sehnen A B, C D in den Punkten K, I schneidet, und man betrachtet diese Gerade als die Projektion einer Kante des schiefen Kegels, dessen Scheitel oder Mittelpunkt in G ist, so muß bewiesen werden, daß diese Kante sich zu gleicher Zeit auf die beyden Kreise lehnt, welche als Durchmesser die Sehnen A B, C D haben.

Nehmen wir an, daß sie durch den Punkt des Kreises vom Durchmesser C D gehe, welcher sich in I auf die Ebene der drey Mittelpunkte O, E, F projektirt. Die halbe Sehne dieses Kreises, welche durch denselben Punkt senkrecht auf den Durchmesser C D geführt ist, ist die mittlere Proportionale zwischen den zwey Theilen C I, D I dieses Durchmessers. Zieht man durch den Punkt I die Gerade L I M parallel zu A B, so sind die zwey Dreyecke D I L, M I C ähnlich; denn die Winkel B A D und D C G oder D C M, von denen jeder als Maaß die halbe Summe der Bögen B C, C D hat, sind gleich; aber der Winkel B A D ist gleich dem Winkel M L D; daher haben die beyden Dreyecke D I L, M I C drey gleiche Winkel. Die Aehnlichkeit derselben giebt folgende Proportion

$$DI : IL :: IM : IC$$

woraus folgt daß

$$DI \times IC = IL \times IM.$$

Demnach ist die halbe Sehne am Punkt I nicht nur die mittlere Proportionale zwischen den Geraden D I und I C, sondern auch zwischen den Theilen I L, I M der Geraden L M; sie ist daher auch die Sehne des Kreises, welcher die Gerade L M als Durchmesser hat, und dessen Ebene senkrecht auf jene der drey Mittelpunke O, E, F ist. Aber in einem Kegel sind alle parallelen Schnitte ähnlich (II. Buch. Note I.); daher schneidet die durch A B senkrecht auf die Ebene der drey Mittelpunkte geführte Ebene, die Kegelfläche, deren Mittelpunkt in G ist, nach einem Kreise vom Halbmesser A B. Auf dieselbe Art läßt sich beweisen, daß die Gerade, welche als Projektion auf der Ebene der drey Mittelpunkte die Gerade I′ G′ K′ hat, sich auf die zwey Kreise von den Durchmessern A B und C D stützt. Man kann daher durch je zwey, auf einer Kugel gegebene Kreise zwey schiefe Kegel führen; deren Scheitel in der Ebene liegen, die durch den Mittelpunkt der Kugel und durch die Mittelpunkte der gegebenen Kreise geht.

275. Umgekehrt, wenn ein Kreis der Kugel gegeben ist, und ein Punkt außerhalb dieser Kugel, so geht der schiefe Kegel, welcher als Basis den Kreis hat und als Scheitel den Punkt, noch durch einen zweyten Kreis der Kugel, dessen Ebene senkrecht auf diejenige ist, welche durch den Scheitel des Kegels, den Mittelpunkt der Kugel und den Mittelpunkt des gegebenen Kreises geführt wurde. Diese Ebene schneidet den Kegel nach zwey Kanten, und der Winkel den diese zwey Kanten einschließen, ist das was man den Haupt-Schnitt des schiefen Kegels nennt. Dieser Schnitt hat die Eigenthümlichkeit, daß eine der ihn bildenden Kanten mit den Ebenen der zwey kreisförmigen Schnitte des Kegels, Winkel macht, welche im Allgemeinen untereinander verschieden sind, aber in jedem Falle gleich den Winkeln der andern Kante des Hauptschnittes mit den nemlichen Ebenen sind. In der Figur 2. Taf. XXIII. macht die Kante A G mit den Ebenen der Kreise A B, C D gleiche Winkel, mit jenen, welche die Kante B G mit denselben Ebenen C D, A B bildet. Wenn demnach ein schiefer Kegel vom zweyten Grad gegeben ist, so ist aus dem

vorhergehenden ersichtlich, daß er durch einen Kreis auf zwey verschiedene Arten erzeugt werden kann; und daß es keinen Punkt desselben gebe, durch den man nicht zwey Kreise führen könne, welche in Ebenen gelegen sind, von verschiedener Richtung und senkrechter Stellung auf die Ebene des Hauptschnittes der Kegelfläche; was dem in Art. 125. II. Buch vorgetragenen Satze gemäß ist.

276. Sind die Ebenen der zwey Kreise einer Kugel parallel, so wird der durch diese zwey Kreise gehende Kegel, welcher vor den Parallelismus der Ebenen schief war, ein gerader Kegel. Wenn die zwey Kreise von gleichem Halbmesser sind und in parallelen Ebenen liegen, so gestaltet sich der gerade Kegel in einen geraden Cylinder um.

277. Wenn eine Kugel und ein schiefer Kegel von kreisförmiger Grundlinie sich durchdringen, so besteht die Durchschnittslinie aus zwey Kreisen, welche in verschiedenen Ebenen gelegen; wie wir so eben bewiesen haben. Es kann sich ereignen, daß der schiefe Kegel, welcher die Kugel schneidet, als Mittelpunkt, einen Punkt der Kugelfläche habe; alsdann wird der eine von den Durchschnittskreisen der zwey Flächen auf einen Punkt reduzirt, welcher der Mittelpunkt des Kegels ist.

Nehmen wir an, daß, während die Gerade A B, (Fig. 2. Taf. XXIII.) und der Punkt O unveränderlich bleiben, die Gerade C D stets kleiner werde, indem sie dabey parallel zu sich selbst bleibt, so wird sie endlich auf den Punkt H zurückkommen, welchen man als Scheitel der Kegelfläche nimmt, und welcher dem Umkreise A B C D angehört.

In Folge dieser Hypothese fallen aber die zwey Geraden O H, O F in einander, daher wird jede Ebene, welche senkrecht auf den durch den Scheitel des Kegels geführten Halbmesser der Kugel ist, diesen Kegel nach einem Kreise schneiden, was auch noch auf folgende Art erwiesen werden kann.

Es sey A C Q (Fig. 3. Taf. XXIII.) der Hauptschnitt des schiefen Kegels, welcher seinen Mittelpunkt in dem Punkt C der Kugelfläche hat, und als Grundlinie den kleinen Kreis vom Halbmesser A B. Die Ebene P Q, welche senkrecht auf den Halbmesser O C der Kugelfläche ist, schneidet den Kegel nach einem Kreise vom Halbmesser R S; denn die Winkel der Kanten A C, B C mit der Ebene A B sind offenbar gleich den Winkeln der nemlichen Kanten B C, A C mit der Ebene P Q oder R S. (Art. 275.) Daher sind A B und R S die Risse von Ebenen, welche senkrecht sind auf die Ebene des Hauptschnittes des Kegels, und welche diesen Kegel nach Kreisen schneiden.

278. Auf diese Eigenthümlichkeit des Kegels, welcher als Scheitel einen Punkt der Kugelfläche hat, und als Basis einen Kreis derselben Kugel, ist die Konstruktion der geographischen Karten mittelst der Methode der stereographischen Projektion gegründet. Nach dieser Methode sind die projektirenden Linien Gerade, welche nach einem Punkt der Kugelfläche zusammenlaufen, und die Projektionsebene ist senkrecht auf den Halbmesser der Kugel, welcher jenem Punkt entspricht. Die nach den Punkten eines Kreises der Kugel gerichteten projektirenden Linien gehören einem schiefen Kegel, welcher von der Projektionsebene nach einem Kreise geschnitten wird; aber dieser letzte Kreis ist die Projektion des ersten, daher werden alle Kreise der Kugel wiederum durch andere Kreise dargestellt. Die Erde, als eine Kugel betrachtet, ist in Meridiane und Parallelkreise eingetheilt, die sich auf den stereographischen Karten nach anderen Kreisen projektiren.

Von den ebenen Schnitten des Umdrehungs-Hyperboloids.

279. Alle ebenen Schnitte des Umdrehungshyperboloids sind krumme Linien vom zweyten Grad. Durch ein einfaches Verfahren läßt sich bestimmen, welche Stellung die durchschneidende Ebene, in Bezug auf die Fläche, haben müsse, damit der Schnitt eine Ellipse, eine Hyperbel oder eine Parabel sey.

Denken wir uns durch einen beliebigen Punkt der Umdrehungsaxe eine Parallele zu der geraden Erzeugungslinie der Fläche geführt, und nehmen wir an, diese Parallele drehe sich zu gleicher Zeit mit der Erzeugungslinie um die Axe. Durch diese Bewegung wird die Erzeugungslinie das Hyperboloid hervorbringen, und ihre Parallele wird eine gerade Kegelfläche beschreiben: dergestalt, daß es auf dem Hyperboloid keine Gerade giebt, welche nicht ihre Parallele auf der Kegelfläche hätte, und eben so umgekehrt, keine Gerade der Kegelfläche, der nicht eine Parallele auf dem Hyperboloid entspräche.

Führt man nun durch den Scheitel des Kegels eine parallele Ebene zu der Durchschneidenden, so schneidet entweder diese Ebene den Kegel nach zwey Kanten, oder sie berührt ihn nach einer Kante, oder endlich sie hat gar keinen Punkt außer dem Scheitel mit dem Kegel gemein. Je nachdem einer dieser drey Fälle statt findet, ist der Schnitt des Umdrehungshyperboloids eine Hyperbel, eine Parabel oder eine Ellipse. Dieses ist einleuchtend bey der Ellipse, denn da die durchschneidende Ebene in diesem Fall zu keiner der Geraden des Hyperboloids parallel ist, so ist die Durchschnittslinie, wie in dem Beyspiel der Taf. XXV. eine geschlossene Linie. Wenn die Ebene den Kegel nach zwey Kanten schneidet, so werden die Geraden des Hyperboloids, die zu diesen beyden Kanten, und folglich zur durchschneidenden Ebene parallel sind, nur im Unendlichen von der letzten Ebene getroffen werden können; die Tangenten an den auf diesen Erzeugungslinien gelegenen Punkten sind die A s y m p t o t e n des Schnittes.

Die tangirende Ebene an einem Punkt des Umdrehungshyperboloids ist durch die zwey Bedingungen bestimmt, durch eine Gerade der Fläche zu gehen, und senkrecht auf die Meridianebene des Berührungspunkts zu seyn. (Art. 136.) Liegt aber der Berührungspunkt im Unendlichen auf einer geraden Erzeugungslinie der Fläche, so ist die Meridianebene dieses Punkts nothwendig parallel zu jener Geraden.

Eine Ebene, welche durch die bekannte Gerade rechtwinklig auf die zu derselben parallelen Meridianebene geführt wurde, ist die tangirende Ebene an dem Punkt, welcher auf jener Geraden im Unendlichen liegt: der Durchschnitt dieser Ebene und der Ebene des Schnittes ist die A s y m p t o t e.

Es ist hieraus ersichtlich, daß jeder Meridianschnitt der Fläche eine Hyperbel sey; und daß eine solche Hyperbel als Asymptoten die Projektionen derjenigen Geraden des Hyperboloids auf der Ebene des Meridianes habe, welche parallel zu dieser Ebene sind.

280. Im Falle die Ebene das Umdrehungshyperboloid nach einer P a r a b e l schneidet, so ist die tangirende Ebene an dem Punkt, welcher im Unendlichen auf der Geraden liegt, die zu der durchschneidenden Ebene parallel ist, selbst parallel zu dieser letzten Ebene und der Schnitt hat keine Asymptote. Um den Parallelismus der genannten zwey Ebenen zu beweisen, bemerken wir, daß

die Ebene, welche durch den Mittelpunkt des Kegels parallel zu der durchschneidenden geführt ist, zufolge der Hypothese, den Kegel nach einer Kante berührt, und daß diese beyden Ebenen folglich senkrecht auf die Meridianebene sind, welche durch die Berührungskante geht; nun aber ist diese Kante parallel zu der Erzeugungslinie des Hyperboloids, auf welcher der im Unendlichen gelegene Punkt des Schnittes sich befindet, die tangirende Ebene an dem Punkt im Unendlichen, welche durch jene Erzeugungslinie geht, und die durchschneidende Ebene gehen daher durch zwey Parallelen und sind beyde senkrecht auf eine und dieselbe Meridianebene, sie sind daher parallel unter sich; die Tangente an jenem Punkt liegt daher ganz im Unendlichen, und es folgt daraus, daß der Schnitt keine Asymptote habe, welche Eigenthümlichkeit die Parabel von den andern krummen Linien des zweyten Grades auszeichnet.

Von den ebenen Schnitten des hyperbolischen Paraboloids.

281. Nehmen wir an, ein hyperbolisches Paraboloid sey durch eine Ebene nach einer krummen Linie vom zweyten Grad geschnitten, und man verlange die besondere Art der Linie zu kennen?

Wenn die durchschneidende Ebene durch eine Gerade der Fläche geht, so enthält sie noch eine zweyte Gerade der nemlichen Fläche, welche zusammen den totalen Schnitt bilden, und die Ebene berührt die Fläche in dem Begegnungspunkt der zwey Geraden. (Art. 138.)

Wenn die Ebene durch keine Gerade der Fläche geht, so giebt es, welche Stellung sie auch haben mag, immer zwey Gerade der Fläche, welche zu derselben parallel sind, und die Punkte der Durchschnittslinie, welche auf diesen Geraden liegen, sind im Unendlichen. Um dieses darzuthun, bezeichnen wir die Ebene, zu welcher die Erzeugungslinien des einen Systems, des hyperbolischen Paraboloids parallel sind, mit P und die Ebene des Parallelismus, der zweyten Erzeugungsart, mit Q. Die gegebene Ebene wird diese beyden Ebenen nach zwey Geraden schneiden, welche wir mit p und q bezeichnen wollen. A und A′ seyen zwey Erzeugungslinien parallel zu der Ebene P; B und B′ seyen zwey Gerade des zweyten Erzeugungssystems, welche parallel zu der Ebene Q sind. Man bestimme die Parallele zu p, welche sich auf die zwey Geraden B, B′ stützt; und die Parallele zu q, welche sich auf die Geraden A, A′ als Leitlinien anlehnt. Um diese Parallelen zu konstruiren, führe man durch die Gerade B und durch eine Parallele zu p eine Ebene, welche die Gerade B′ in einem Punkte trifft, durch den man eine andere Parallele zu p führe, welches eine Erzeugungslinie des ersten Systems ist. Durch die Gerade A und durch eine Parallele zu q führe man eine Ebene, welche die Gerade A′ in einem Punkte trifft, durch welchen man eine zu q parallele Erzeugungslinie führt. Die zu p und q parallelen Erzeugungslinien, welche wir mit p', q' bezeichnen wollen, sind offenbar parallel zu der durchschneidenden Ebene, weil jene diese beyden ersten Geraden enthält; nun aber sind die Punkte der Durchschnittslinie des Paraboloids und einer Ebene diejenigen, in welchen die Erzeugungslinien des Paraboloids auf die Ebene treffen; welches daher auch die Stellung der durchschneidenden Ebene seyn mag, so giebt es zwey Punkte des Durchschnittes, die in einer unendlichen Entfernung auf den zu derselben Ebene parallelen Erzeugungslinien liegen; woraus folgt, daß das hyperbolische Paraboloid durch eine Ebene nach keiner geschlossenen Linie geschnitten werden kann; die ebenen Schnitte dieser Fläche sind daher entweder Parabeln oder Hyperbeln. Wir werden nun beweisen, daß die Ebenen, welche parallel sind, zu der geraden Durchschnittslinie der Ebenen

P und Q, zu denen die beyden Systeme von geraden Erzeugungslinien des Paraboloids parallel sind, diese Fläche nach Parabeln schneiden, und daß die Schnitte jeder andern Ebene Hyperbeln sind.

282. Die durchschneidende Ebene trifft die zwey Ebenen P und Q nach zwey Geraden; die zu denselben Geraden parallelen Erzeugungslinien p', q' enthalten in im Unendlichen gelegenen Punkte der Durchschnittslinie, und wenn die Ebenen, welche die Fläche an diesen Punkten berühren, die gegebene Ebene schneiden, so sind die geraden Durchschnitte dieser Ebenen, Asymptoten der Durchschnittslinie des Paraboloids und der gegebenen Ebene, woraus folgt, daß diese Linie alsdann eine Hyperbel seyn müsse.

Irgend eine Ebene X, welche durch die zur durchschneidenden Ebene parallele Erzeugungslinie p' geht, trifft eine andere Erzeugungslinie von demselben System die einen Punkt; die durch denselben Punkt parallel zur Ebene Q geführte Ebene schneidet die Erzeugungslinie p' in dem Berührungspunkt des Paraboloids und der Ebene X; wenn daher die Ebene X parallel zu der Ebene P ist, so ist sie auch parallel zu allen Erzeugungslinien, welche wie A, A′ zu derselben Ebene parallel sind, sie trifft daher keine dieser Geraden, und da sie tangirend zu dem Paraboloid ist, so liegt der Berührungspunkt im Unendlichen auf der Geraden p'; daher ist der Durchschnitt dieser tangirenden Ebene und der Ebene, welche das Paraboloid schneidet, die Asymptote, des in der letzten Ebene enthaltenen Schnittes. Aus dem gleichen Grunde trifft die Ebene, welche durch die Gerade q' parallel zu der Ebene Q geführt ist, keine der zu dieser Ebene parallelen Erzeugungslinien der Fläche, und sie ist, wie jede Ebene, die durch eine Gerade der Fläche geht, tangirend zu derselben (Art. 131.); der Berührungspunkt ist daher im Unendlichen gelegen. Der Durchschnitt dieser letzten Ebene und der durchschneidenden, bestimmt die zweyte Asymptote. Die beyden erhaltenen Asymptoten sind, zufolge dieser Konstruktionen, parallel zu den Geraden p, q, den geraden Durchschnitten der durchschneidenden Ebene und der Ebenen P und Q.

283. Im Falle die durchschneidende Ebene parallel wäre zu dem Durchschnitt der Ebenen P und Q, so ist einleuchtend, daß die Asymptoten parallel unter sich werden. Ueberdies sind sie in einer unendlichen Entfernung; denn die zwey, zu dem geraden Durchschnitt der Ebenen P und Q parallelen Erzeugungslinien liegen in einer unendlichen Entfernung von dieser geraden Durchschnittslinie. Die Ebenen, welche durch diese Erzeugungslinien parallel zu den Ebenen P und Q geführt sind, können daher die durchschneidende Ebene nur nach Geraden treffen, welche ganz im Unendlichen liegen. Nun aber sind diese Geraden die Asymptoten; wenn daher die durchschneidende Ebene parallel ist, zu dem geraden Durchschnitt der zwey Ebenen des Parallelismus des Paraboloids, so ist der Schnitt eine von den Linien des zweyten Grads, welche sich ins Unendliche ausdehnen, und keine Asymptoten haben, das heißt eine Parabel; in jeder andern Richtung bringt die durchschneidende Ebene eine Hyperbel hervor, und in keinem Fall kann der Schnitt eine geschlossene, in sich selbst zurückkehrende krumme Linie seyn.

284. Ob nun die Linie eine Parabel oder eine Hyperbel sey, so erhält man die Tagente an einen ihrer Punkte, indem man den gemeinsamen Durchschnitt der Ebene, welche das Paraboloid an diesem Punkt berührt, und der Ebene des Schnittes konstruirt.

Von den ebenen Schnitten des Hyperboloids von einem Netze.

285. Wenn man durch einen beliebigen Punkt des Raumes, die Parallelen führt zu fünf Geraden eines Hyperboloids, die einem nemlichen Erzeugungssystem angehören, so besitzt der elliptische Kegel, welcher durch diese Parallelen geht, die Eigenthümlichkeit, daß es keine, dem einen oder dem andern Erzeugungssystem angehörende Gerade des Hyperboloids gäbe, die nicht ihre Parallele auf jenem Kegel habe. Wenn man diesen Satz als bewiesen annimmt, und den Kegel konstruirt hat, von welchem man den Mittelpunkt kennt, und fünf Punkte der Grundlinie, die auf den fünf gegebenen Kanten gelegen sind, *) so kann man daraus die Art der krummen Linie erkennen, welche aus dem Durchschnitt des Hyperboloids und einer gegebenen Ebene entsteht; denn nachdem man durch den Mittelpunkt des Kegels eine Ebene parallel zu der gegebenen geführt hat, so hat diese Ebene mit dem Kegel entweder nichts gemein als den Mittelpunkt, oder sie ist tangirend zu demselben oder sie enthält zwey Kanten des Kegels.

Der entsprechende Schnitt, nach einer dieser drey Hypothesen, ist entweder eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel.

Nehmen wir an, der Schnitt sey eine Hyperbel, so sind alsdann zwey gerade Erzeugungslinien des Hyperboloids von einem Netze, parallel zu der durchschneidenden Ebene, und sie bestimmen die Asymptoten der Hyperbel. In der That, bezeichnen wir mit A, die erste von jenen Geraden und mit B, C zwey andere Gerade des Hyperboloids, von dem nemlichen Erzeugungssystem.

286. Jede durch die Gerade A gehende Ebene schneidet die Geraden B und C in zwey Punkten; die Gerade, welche diese beyden Punkte verbindet, und die Gerade A bestimmen die Stellung einer Ebene, welche die Fläche in dem Begegnungspunkt der zwey Geraden tangirt. Wenn man durch die Geraden B, C, und parallel zu der Geraden A zwey Ebenen führt, so ist der Durchschnitt dieser Ebenen parallel zu A, und schneidet die zwey Geraden B und C; wenn man daher durch denselben Durchschnitt und durch die Gerade A eine Ebene führt, so ist diese tangirend zu der Fläche an einem auf der Geraden A im Unendlichen gelegenen Punkt, und folglich ist der Durchschnitt dieser tangirenden Ebene, und einer zur Geraden A parallelen durchschneidenden Ebene die Asymptote der Hyperbel.

Arbeitet man eben so bey der Geraden A′ der Fläche, welche parallel zur durchschneidenden Ebene ist, so bestimmt man zwey weitere beliebige Gerade B′, C′ von der nemlichen Erzeugung; durch diese Geraden führe man parallele Ebenen zu der Geraden A′. Der Durchschnitt dieser Ebenen bestimmt mit der Geraden A′ eine zweyte tangirende Ebene, deren Berührungspunkt im Unendlichen liegt, und welche die Ebene der Hyperbel nach der zweyten Asymptote schneidet.

Der elliptische Kegel, welcher die verschiedenen Arten der ebenen Schnitte des Hyperboloids von einem Netze bestimmt, verwandelt sich in einen geraden kreisförmigen Kegel, wenn das Hyperboloid eine Umdrehungsfläche wird.

*) Wir nehmen als bekannt an, daß durch je fünf Punkte einer Ebene nur eine einzige Kegelschnittslinie möglich ist.

Zweytes Kapitel.

Durchschnitte der krummen Flächen unter sich.

Methode zur Bestimmung der Durchschnitte krummer Flächen.

Allgemeine Aufgabe.

Die Erzeugung zweyer krummen Flächen ist bekannt und alle Angaben, welche diese Erzeugung bestimmen, sind auf den Projektionsebenen verzeichnet; man soll die Durchschnittslinie dieser Flächen konstruiren?

287. Auflösung. Man denke sich eine Reihe unbestimmter, und auf passende Art im Raume gelegener Ebenen; wir wollen zum Beyspiel, um unsere Begriffe festzustellen, diese Ebenen sämmtlich horizontal annehmen und mit E, E′, E″....2c. bezeichnen.

Beschäftigen wir uns zuerst mit der Ebene E; diese Ebene wird jede der beyden vorgelegten Flächen nach einer horizontalen Kurve durchschneiden: man konstruire die Projektionen dieser Kurven, nach den im vorhergehenden Kapitel vorgetragenen Verfahrungsarten.

Ist dieses geschehen, so kann es seyn; daß die Kurven, nach denen die Ebene E die beyden Flächen schneidet, sich selbst durchschneiden, oder daß sie dies nicht thun. Wenn sie sich nicht durchschneiden, wie verlängert sie auch seyn mögen, so ist dies ein Beweis, daß die beyden Flächen in der Höhe der Ebene E keinen Punkt mit einander gemein haben. Schneiden sich aber die zwey Kurven, so werden sie dies in einer gewissen Zahl von Punkten thun, und diese Punkte, da sie zu gleicher Zeit sowohl auf der ersten Kurve liegen, als auf der Zweyten, liegen daher auch zu gleicher Zeit auf den beyden Flächen, und sie gehören dem gemeinschaftlichen Durchschnitte dieser Flächen an. Ueberdies haben die genannten Punkte zu Projektionen die Begegnungspunkte der Projektionen der Kurven, und sie sind daher bestimmt.

Indem man diese bey der Ebene E gemachte Operation bey so vielen andern Ebenen E′, E″....2c. der angenommenen Reihe, als man nöthig erachtet, wiederholt, findet man die Projektionen so vieler Punkte des Durchschnittes der zwey Flächen, als man bedarf, um die Projektionen des Schnittes selbst verzeichnen zu können.

288. Die so eben vorgetragene Methode ist allgemein, welches System von durchschneidenden Ebenen man auch gewählt habe. Wir werden übrigens sogleich sehen, daß die Wahl dieses Systems durchaus nicht gleichgültig sey, sondern daß man

es in gewissen Fällen so einrichten könne, daß sich daraus leichtere und zierlichere Konstruktionen ergeben; und daß es selbst vortheilhaft seyn könne, statt eines Systems von Ebenen eine Reihe krummer Flächen anzuwenden, welche nur in einer Dimension von einander abweichen.

Um den Durchschnitt zweyer Umdrehungsflächen zu konstruiren, deren Axen vertikal sind, ist das vortheilhafteste System von Ebenen eine Reihe von Horizontalebenen; denn jede von diesen Ebenen schneidet die zwey Flächen nach Kreisen, deren Mittelpunkte in den respektiven Axen liegen, deren Halbmesser gleich sind den Ordinaten der Erzeugungslinien in der Höhe der durchschneidenden Ebene, und deren Horizontalprojektionen wiederum Kreise sind von bekannter Größe und Stellung. Man wird leicht einsehen, daß wenn die Axen der Flächen parallel wären aber nicht vertikal, man die Projektionsebenen ändern müßte und sie so wählen, daß eine derselben senkrecht auf die Axen würde.

289. Wenn der Durchschnitt zweyer Kegelflächen von beliebigen Grundlinien konstruirt werden sollte, deren Risse auf der Horizontalebene bestimmt wären, so würde man durch das System von Horizontalebenen in Operationen gezogen, welche für diesen Fall viel zu langwierig wären; denn jede von diesen Ebenen würde die zwey Flächen nach krummen Linien schneiden, welche zwar den entsprechenden Rissen der Flächen ähnlich wären, die aber nichts desto weniger, jede ins Besondere, punktweise konstruirt werden müßten; während dem, wenn man ein System von Ebenen anwendet, die durch die gegebenen Mittelpunkte der beyden Kegel gehen, jede dieser Ebenen die beyden Kegelflächen nach einer gewissen Zahl gerader Linien schneiden wird, die sich, außer dem Mittelpunkte in eben so vielen Punkten begegnen, welche auf dem Durchschnitte der zwey Flächen liegen.

Aus demselben Grunde würde man bey zwey Cylinderflächen von beliebigen Grundlinien, deren Kanten verschieden geneigt wären, ein System von durchschneidenden Ebenen wählen, welche parallel wären zu den Erzeugungslinien der beyden Cylinder. Die Schnitte dieser Ebenen in den Flächen wären gerade Linien, die sich in Punkten ihrer Durchschnittslinie begegneten. In diesen beyden genannten Fällen würden die Punkte beyder Projektionen der zu bestimmenden Durchschnitte durch die Begegnungen gerader Linien konstruirt.

290. In einigen Fällen kann es sogar vortheilhaft seyn, keine Ebenen, sondern ein System krummer Flächen zu wählen. Bey zwey Umdrehungsflächen, deren Axen in einer Ebene wären, aber nicht parallel unter sich, würde man ein System von Kugelflächen erwählen, welche ihren gemeinschaftlichen Mittelpunkt in dem Begegnungspunkte

der beyden Axen hätten. Denn jede dieser Kugelflächen schnitte die zwey Umdrehungsflächen nach den Umfängen zweyer Kreise, welche ihre Mittelpunkte auf den respektiven Axen hätten, und deren Ebenen senkrecht auf die Ebene der beyden Axen wären. Die Durchschnittspunkte dieser zwey Umfänge, welche zu gleicher Zeit auf der Kugelfläche und auf beyden Umdrehungsflächen lägen, gehörten dem verlangten Durchschnitte an. Somit würden die Projektionen des Durchschnittes durch die Begegnungen von Kreisen und geraden Linien konstruirt. In diesem Falle wäre die vortheilhafteste Stellung der Projektionsebenen, wenn Eine senkrecht auf eine der Axen wäre, und die Andere parallel zu den zwey Axen.

291. Hat man bey einem vorgelegten Falle dasjenige System durchschneidender Ebenen oder Flächen gewählt, wodurch sich die einfachsten Schnitte und die leichtesten Konstruktionen ergeben; so ist, um allen nutzlosen Arbeiten auszuweichen, die zunächst sich darbietende Frage: die Gränze der Ebenen zu bestimmen, welche Punkte der zu konstruirenden Durchschnittslinie enthalten. Es läßt sich übrigens, wie leicht einzusehen, für die Aufsuchung dieser Gränzen eben so wenig wie für die Wahl des Systems der durchschneidenden Ebenen eine allgemeine Regel geben; da beyde sowohl von der Erzeugungsart der gegebenen Flächen, als von ihrer gegenseitigen Stellung abhängen.

292. Die Anwendung der vorgetragenen Methode erfodert ferner bey jedem einzelnen Falle noch eine Erörterung, deren Zweck ist zu erkennen, ob die Durchschnittskurve der zwey vorgelegten Flächen *eben* sey; ob sie *merkwürdige Punkte* habe, und wie diese zu bestimmen seyen; ob sie *einen* oder *mehrere* Zweige habe, und wie man unter den, durch die allgemeine Methode gefundenen Punkten, diejenigen unterscheide, welche einem nemlichen Zweige angehören; ob die Durchschnittslinie aus *geschlossenen* oder *unendlichen* Zweigen bestehe ꝛc.

Bey den einzelnen Beyspielen werden wir in die erfoderlichen derartigen Diskussionen eingehen.

Von den Tangenten und den Normalebenen zu den Durchschnittslinien krummer Flächen.

293. Jeder Punkt der Durchschnittslinie zweyer krummen Flächen gehört den beyden Flächen zu gleicher Zeit an. Wenn man daher durch einen solchen Punkt, indem man ihn als der ersten Fläche angehörig betrachtet, eine tangirende Ebene zu derselben Fläche führt, so berührt diese Ebene den Durchschnitt in dem betrachteten Punkt. Gleicherweise, wenn man durch denselben Punkt, indem man ihn als auf der zweyten Fläche liegend betrachtet, eine tangirende Ebene zu dieser Fläche führt, so berührt auch diese

Ebene den Durchschnitt in dem betrachteten Punkt. Die zwey tangirenden Ebenen berühren daher den Durchschnitt in dem nemlichen Punkt, und da dieser Punkt zugleich der Geraden angehört, nach welcher sie sich schneiden, so ist dieser gerade Durchschnitt der zwey tangirenden Ebenen die Tangente zu dem Durchschnitte der beyden Flächen an dem genannten Punkt.

Wenn die Eine der beyden Flächen eine Ebene ist, so haben wir schon (Art. 218.) gesehen, daß die Tangente an irgend einem Punkt ihrer Durchschnittslinie in dem Durchschnitte der tangirenden Ebene und der Ebene des Schnittes liege.

294. Die Ebene, welche eine aus dem Durchschnitte zweyer Flächen entstandene doppelt gekrümmte Linie rechtwinklig durchschneidet, und welche folglich senkrecht auf die Tangente an dem Durchschnittspunkte ist, heißt **Normalebene** der krummen Linie (Art. 69). Obschon man bey den Anwendungen der darstellenden Geometrie häufig Normalebenen zu krummen Linien von doppelter Krümmung zu betrachten hat; so werden wir uns doch, in Bezug auf ihre Konstruktionen, in keine weiteren Details einlassen, da sie immer als bekannt zu betrachten sind, sobald die Stellung der entsprechenden Tangente zu der Linie bestimmt ist.

Aufgaben über die Konstruktionen der Durchschnitte krummer Flächen.

Erste Aufgabe.

Es sind zwey Umdrehungsflächen von vertikalen Axen gegeben; man soll ihre gemeinschaftliche Durchschnittslinie konstruiren?

295. **Auflösung.** Wenn man bey der Untersuchung, welche zu der vorliegenden Aufgabe Veranlassung giebt, keine anderen Durchschnitte zu betrachten hat, als den der beyden Umdrehungsflächen, so gewährt es einigen Vortheil die Projektionsebenen so zu wählen, daß die Vertikalebene parallel zu den beyden Axen wäre. Sobald aber zu gleicher Zeit noch die Durchschnitte dieser Flächen mit Andern zu betrachten wären, so brächte die Veränderung der Projektionsebenen keinen weiteren Vortheil, und man kann sich die Gegenstände sogar leichter vorstellen, wenn man sie Alle auf die nemlichen Ebenen bezieht. Wir werden daher die Ebene der beyden Axen in beliebiger Neigung gegen die Vertikalebenen annehmen.

296. Wir wählen als Beyspiel zwey gerade kreisförmige Kegel Taf. XXVII. (A, $a\,a'$) und (B, $b\,b'$) seyen die vertikalen Axen der beyden Flächen, (A, a) der Mittelpunkt der Einen und T U T V ihr Riß auf der Horizontalebene; (B, b) sey

der Mittelpunkt der zweyten Fläche und ihr Riß auf der Horizontalebene sey der Kreis R X Y Z.

Man schneide beyde Flächen durch eine Reihe von Horizontalebenen, deren Projektionen auf der Vertikalebene die unbestimmten Horizontalen $l\ l$, $l'\ l'$, $l''\ l''$.... rc. sind. Jede von diesen Horizontalebenen, zum Beyspiel die in $l\ l$ projektirte, begegnet der ersten Fläche nach einem Kreise, dessen Horizontalprojektion M F G ist; dieselbe Ebene begegnet der zweyten Fläche ebenfalls nach einem Kreise, der sich nach N F G auf die Horizontalebene projektirt. Die zwey Kreise M F G, N F G begegnen sich selbst in zwey Punkten F, G; man projektire diese auf die Horizontale $l\ l$ nach f und g, und man hat in (F, f), (G, g) zwey Punkte der zu bestimmenden Durchschnittslinie.

Dieses nemliche Verfahren bey einer beliebigen Anzahl von Hülfsebenen $l'\ l'$, $l''\ l''$,... rc. wiederholt, giebt bey einer jeden, welche Punkte des Schnittes enthält, im Allgemeinen zwey solcher Punkte.

297. Es ist sofort erfoderlich, die begränzenden Ebenen $l\ l$ der angenommenen Reihe zu finden, welche die äußersten Punkte der zu bestimmenden Linie enthalten. Zu diesem Ende führe man durch die beyden Axen (A, $a\ a'$), (B, $b\ b'$) eine Ebene V U, welche die beyden Flächen, jede nach einem Meridiane schneidet, und lasse diese Ebene sammt den in ihr enthaltenen Meridianschnitten sich um die eine Axe (A, $a\ a'$) drehen, bis in die zur Vertikalebene parallele Stellung T T. Durch diese Drehung fällt der Meridian der ersten Fläche mit dem gegebenen $t\ a\ t'$ zusammen, und der Meridian der zweyten Fläche wird die Stellung (A T, $x''\ b''\ z''$) nehmen, welche leicht zu konstruiren ist.

Ist dieses geschehen, so werden die in einer Ebene T T betrachteten Meridiane $t\ a\ t'$, $x''\ b''\ z''$ sich in einer gewissen Anzahl (in unserm Beyspiele in vier) Punkten schneiden. Durch diese Punkte i', h', d', e' ziehe man die unbestimmten Horizontalen $i'\ i$, $h'\ h$, $d'\ d$, $e'\ e$, so hat man die Projektionen der begränzenden Ebenen der angenommenen Reihe; und wenn man die, auf denselben Horizontalenen gemessenen Abstände der Punkte i', h', d', e' von der Geraden $a\ a'$ nimmt, und sich auf der V A U nacheinander von A nach D, nach H nach I und E trägt, sodann diese letztgenannten Punkte auf die entsprechenden Horizontalen nach d, nach h, nach i und e projektirt, so sind (I, i), (H, h), (D, d), (E, e) die in den begränzenden Ebenen enthaltenen Punkte des Durchschnittes der beyden vorgelegten Umdrehungsflächen.

298. Die gefundene Durchschnittslinie besteht aus zwey, auf beyden Netzen der gegebenen Flächen gelegenen Zweigen (D F E G, $d\ f\ e\ g$), (H I K, $h\ i\ k$); und da die beyden Flächen symetrisch sind, in Bezug auf die ihnen gemeinschaftliche Meridian-

ebene V A B U, so ist leicht zu ersehen, daß auch die Linie ihres gemeinsamen Durchschnittes symetrisch sey, in Bezug auf dieselbe Ebene.

299. Um an irgend einem Punkt (C, c) der konstruirten Durchschnittslinie die Tangente zu erhalten, so wissen wir, daß diese Tangente die gerade Durchschnittslinie der tangirenden Ebenen zu den zwey gegebenen Flächen an demselben Punkte (C, c) sey; (Art. 282) und daß es, um diese Tangente zu bestimmen, hinreichend ist, ihren Durchschnittspunkt S mit der Horizontalebene zu kennen. Nun aber liegt dieser letzte Punkt, in dem Zusammentreffen der Horizontalrisse der tangirenden Ebenen zu beyden Flächen an dem ihnen gemeinschaftlichen Punkte (C, c); wenn man daher diese Risse Q Q′, R R′ nach den im zweyten Kapitel des zweyten Buches vorgetragenen Methoden konstruirt, und ihren Begegnungspunkt S auf die Vertikalebene nach s projektirt, sodann die Geraden C S, $c\,s$ zieht, so hat man die Projektionen der verlangten Tangente, welche Projektionen selbst wiederum Tangenten sind, zu den Projektionen der Durchschnittslinie.

300. Die Tangenten an den auf der Meridianebene V A B U liegenden Punkten (I, i), (H, h), (D, d), (E, e) der Durchschnittslinie sind horizontal, und ihre unbestimmten Vertikalprojektionen sind die Geraden $i\,i'$, $h\,h'$, $d\,d'$, $e\,e'$, welche die Kurve $i\,k\,h$, $d\,f\,e\,g$, in den Punkten i, h, d, e berühren. In der That, sind die tangirenden Ebenen zu den beyden gegebenen Flächen an einem der genannten Punkte senkrecht auf die nemliche Meridianebene V A B U; ihre Horizontalrisse sind daher parallel unter sich, und ihre gemeinschaftlichen Durchschnitte, welche Tangenten sind zu der Durchschnittslinie an denselben Punkten, sind ebenfalls auf die Ebene V A B U senkrechte Horizontallinien. Da nun überdies die genannten Punkte die Einzigen sind, deren Tangenten eine horizontale Richtung haben, so folgt daraus noch ferner, daß sie diejenigen Punkte eines jeden Zweiges der Durchschnittslinie seyen, deren Höhen über der Horizontalebene ein Maximum oder Minimum sind.

Zweyte Aufgabe.

Man soll den Durchschnitt zweyer Cylinderflächen von beliebigen Grundlinien konstruiren?

301. Auflösung. Bey der vorgelegten Aufgabe, besonders wenn die gegebenen Cylinder von kreisförmigen Grundlinien sind, ist es vortheilhaft, die Projektionsebenen so zu wählen, daß Eine derselben parallel zu den Erzeugungslinien der zwey Cylinder

seyn. Wir werden übrigens hier, der allgemeinen Auflösung wegen, die Erzeugungslinien der zwey Flächen auf beliebige Art gegen die Projektionsebenen gestellt annehmen.

Es seyen demnach G E F N und O K J I (Taf. XXVIII.) die auf der Horizontalebene gegebenen oder konstruirten Risse der beyden Cylinderflächen. (A B, *a b*) sey die Gerade, zu welcher die Erzeugungslinie der einen, und (C D, *c d*) die Gerade, zu welcher die Erzeugungslinie der zweyten Cylinderfläche parallel seyn soll.

302. Man denke sich die beyden Flächen durch eine Reihe von Ebenen geschnitten, welche sämmtlich parallel sind zu ihren respektiven Erzeugungslinien. Diese Ebenen werden die beyden Cylinder nach geraden Linien schneiden, und alle derartigen geraden Schnitte, welche in einer nemlichen Ebene liegen, bestimmen durch ihr wechselweises Zusammentreffen, eben so viele Punkte der zu suchenden Durchschnittslinie.

Demnach führe man durch die eine gegebene Gerade (C D, *c d*) eine Ebene parallel zu der andern gegebenen (A B, *a b*), und man bestimme den Riß A′ C dieser Ebene auf der Horizontalebene Die Horizontalrisse aller Ebenen der angenommenen Reihe werden parallel zu dieser Geraden A′ C seyn.

Wenn, wie in unserm angenommenen Beyspiele, die Grundlinien der beyden Cylinder geschlossene Kurven sind, so ziehe man auf der Horizontalebene die Parallelen zu A′ C, welche wie die G N O oder L J die Grundlinie des einen Cylinders berühren, und die des Andern entweder ebenfalls berühren oder in mehreren Punkten durchschneiden, und man hat die Risse der begränzenden Ebenen der Reihe, das heißt derjenigen Ebenen, zwischen welchen alle Punkte der Durchschnittskurve beyder Cylinder eingeschlossen sind. Denn jede andere, zu den Erzeugungslinien der zwey Cylinderflächen parallele Ebene, deren Risse außerhalb des Flächenraumes fiele, den die zwey Parallelen G O, L J begränzen, schnitte entweder nur Eine der beyden Flächen oder keine von Beyden und offenbar könnte sie in beyden Fällen keine Punkte des Schnittes enthalten, weil sie durchaus keinen Punkt der zweyten Fläche mehr enthielte.

E K sey sofort der Riß einer Ebene der Reihe, welche die Grundlinie der ersten Fläche in den Punkten E, F schneidet, und die Grundlinie der zweyten Fläche in den Punkten I, K. Zieht man durch diese Punkte zu den Projektionen der beyderseitigen Erzeuzungslinien die Parallelen E R, F P und I S, K R, so bestimmen diese Parallelen durch ihr gegenseitiges Zusammentreffen die Punkte S, Q, P, R, die der Horizontalprojektion des Durchschnittes der zwey Flächen angehören.

Indem man die Punkte E, F und I, K auf die Projektionsaxe nach *e*, *f* und *i*, *k* projektirt, und durch diese letzteren Punkte die Parallelen *e r*, *f q* und *i s*, *k p* zu den Geraden *a b*, *c d* zieht, so erhält man durch das Zusammentreffen dieser Parallelen in

s, r, p, q, die Vertikalprojektionen derselben Punkte des Durchschnittes, deren Horizontalprojektionen S, R, P, Q sind.

Wir müssen hier bemerken, daß es nicht nothwendig ist, die beyden Projektionen der Durchschnittslinie unabhängig von einander zu konstruiren, sondern daß wenn man einen Punkt einer Projektion gefunden hat, man seinen entsprechenden auf der andern Projektion finden könne, wenn man diesen Punkt mittelst einer Senkrechten auf die Projektionsaxe auf eine der Geraden projektirt, die ihn enthalten muß.

Dieses liefert ein Mittel, die Genauigkeit der Operationen zu berühren, und in gewissen Fällen die Durchschnitte von Geraden zu vermeiden, die sich in zu schiefen Winkeln begegneten.

303. Um die Tangenten zur Horizontalprojektion zu erhalten, zum Beyspiel jene an dem Punkt S, ist es nur erfoderlich, den Durchschnittspunkt der Tangente, die dem Punkt (S, s) angehört, durch die Horizontalebene zu konstruiren. Aber diese Tangente ist der Durchschnitt der Ebenen, welche die beyden Cylinder an dem Punkt (S, s) berühren, und sie trifft die Horizontalebene in dem Begegnungspunkte der Horizontalrisse jener beyden tangirenden Ebenen, wenn man daher diese Risse E Y, I Y nach den bekannten Verfahrungsarten (Art. 79.) konstruirt, und ihren Begegnungspunkt Y mit dem Punkte S verbindet, so ist die Gerade S Y die verlangte Tangente an den Punkt S; und wenn man den Punkt Y auf die Projektionsaxe nach y projektirt und die Gerade $s\ y$ zieht, so hat man die Tangente in s zu der Vertikalprojektion $r\ s\ p\ q$ des Durchschnittes.

304. Die begränzenden Ebenen der angenommenen Reihe, zum Beyspiele die, deren Risse auf der Horizontalebene L J′ J ist, berührt den ersten Cylinder nach einer durch den Punkt L seiner Grundlinie gehenden Kante (L α, $l\ \alpha'$) und sie durchschneidet den zweyten Cylinder nach zwey Kanten (J α, $j\ \alpha'$), (J′ β, $j'\ \beta'$), die sich mit der Ersten in den Punkten (α, α'), (β, β') des Durchschnittes kreuzen. Aber die tangirenden Ebenen zu den beyden Cylindern an diesen Punkten (α, α'), (β, β') müssen sich offenbar nach den Geraden (J α, $j\ \alpha'$), (J′ β, $j'\ \beta'$) schneiden, daher sind diese Geraden zugleich auch Tangenten zu der Durchschnittslinie der zwey Cylinder. Ihre Horizontalprojektionen J α, J′ β berühren die Horizontalprojektion des Durchschnittes in den Punkten α, β und ihre Vertikalprojektionen $j\ \alpha'$, $j'\ \beta'$ berühren die Vertikalprojektion des Schnittes in den Punkten α', β'.

305. Die Horizontalprojektionen der zwey Cylinderflächen werden durch die Geraden begränzt, welche parallel zu A B berührend an die Grundlinie E L F G N gezogen sind, und durch die Parallelen zu D C, welche die Grundlinie I K M J berühren.

Die Gerade M γ ist eine dieser Parallelen; durch ihren Berührungspunkt M mit der Grundlinie I K M J führe man eine der angenommenen Hülfsebenen. Indem man bey dieser Ebene, deren Riß M′ H ist, wie bey den übrigen arbeitet, erhält man nebst andern, Punkte wie γ der Horizontalprojektion des Durchschnittes, und diese sind zugleich die Berührungspunkte der begränzenden Geraden M γ mit derselben Projektion. Denn die Tangente an dem in γ projektirten Punkt des Durchschnittes ist der tangirenden Ebene zu dem Cylinder von der Grundlinie I K M J enthalten, deren unbestimmte Horizontalprojektion mit der Geraden M γ zusammenfällt. (Art. 128).

Nach der ganz gleichen Folgerung findet man einen Berührungspunkt ε' der Vertikalprojektion der Durchschnittslinie mit der begränzenden Geraden $m\,\varepsilon'$, wenn man durch den Punkt μ der Grundlinie, dessen Vertikalprojektion m ist, eine Hülfsebene der angenommenen Reihe führt und die Projektionen, der in dieser Ebene enthaltenen Punkte der Durchschnittslinie bestimmt.

Auf diese Weise suche man in jeder Projektion die Berührungspunkte der begränzenden Kanten beyder Cylinder mit den Projektionen ihrer Durchschnittslinie, denn diese Punkte sind dadurch, daß man ihre zugehörigen Tangenten kennt, zur genauen Verzeichnung der genannten Projektionen sehr behülflich.

306. Wenn die Grundlinie zweyer sich durchdringender Cylinder geschlossene Linien sind, so kann kein Punkt ihrer Durchschnittslinie im Unendlichen liegen, außer wenn einige Kanten der zwey Cylinder parallel unter sich wären; aber zwey Kanten können nicht unter sich parallel seyn, ohne daß sämmtliche Kanten beyder Cylinder parallel unter sich wären, und nach dieser Hypothese des Parallelismus der beyderseitigen Kanten, schnitten sich die Cylinderflächen nach geraden Linien. Es folgt daraus, daß, welches auch die Leitlinien der zwey Flächen seyn mögen, vorausgesetzt, daß sie bey beyden Cylindern aus geschlossenen Zweigen bestehen, so sind die Zweige des Durchschnittes immer geschlossen, oder sie beschränken sich auf gerade Linien. Wären jedoch die Leitlinien der Cylinder Kurven von unendlichen Zweigen, so daß ihre respektiven Risse auf der Horizontalebene von allen, zu den beyderseitigen Erzeugungslinien parallelen Ebenen getroffen würden, so müßte sich die Durchschnittslinie nothwendig ins Unendliche ausdehnen.

307. Unter der Voraussetzung, daß die Leitlinien der zwey Cylinder geschlossene Linien seyen, wie in der Taf. XXVIII. ist die Durchschnittslinie ebenfalls geschlossen; aber sie kann aus einem einzigen, oder aus zwey abgesonderten Zweigen bestehen, was mittelst der Risse der begränzenden Hülfsebenen unmittelbar erkannt werden kann.

In der vorliegenden Figur ist der Riß G O der einen begränzenden Hülfsebene Sekante zu der Grundlinie G E L N und Tangente zu der Grundlinie K I J M; der

zweyte begränzende Riß L J hingegen ist Sekante zu der letzten Grundlinie und Tangente zu der ersten. Aus dieser Stellung der begränzenden Risse wird man sogleich erkennen, daß keiner der beyden Cylinder von dem andern gänzlich durchdrungen werde. Der Abschnitt des ersten Cylinders, welchem der Bogen G G′ N angehört, streift über den zweyten Cylinder weg, und der Abschnitt dieses Zweyten, dem der Bogen J′ μ′ J entspricht, läuft unter dem ersten hindurch, so daß der eine Cylinder gewissermaaßen ein Stück aus dem Andern ausreißet. Die Durchschnittslinie der beyden Cylinder kann daher nur aus einem einzigen geschlossenen Zweige gebildet seyn.

Würde hingegen auch der Riß L J, so wie der G C, die Grundlinie I J M K des zweyten Cylinders berühren, und die des ersten durchschneiden, so wäre dieser letzte Cylinder nothwendig ganz von dem ersten durchdrungen; der Durchschnitt bestünde aus zwey abgesonderten Zweigen, einem Zweige des Eintritts und einem Zweige des Ausganges des kleineren Cylinders aus dem Größeren.

Ein dritter Fall wäre endlich, wenn ein begränzender Riß zugleich beyde Grundlinien berührte; die Durchschnittslinie der zwey Cylinder bestünde sodann aus einem einzigen Zweige mit einem doppelten Punkte, und diese Linie bildete den Uebergang der Schnitte von zwey Zweigen, zu jenen von einem einzigen Zweige.

308. Es giebt Fälle, wo die Durchdringung zweyer Cylinder eine **ebene** Kurve ist. Nehmen wir zum Beyspiel einen horizontalen Cylinder (Fig. *a.* Taf. XXVIII.), welcher als Grundlinie einen vertikalen Kreis vom Durchmesser A B hat, und von welchem die, durch die Endpunkte A, B desselben Durchmessers gehenden Kanten die Honrizontallinien A C E, B F D sind. Indem man diesen Cylinder durch eine vertikale Ebene C D schneidet, und diesen Schnitt als die Grundlinie eines zweyten Cylinders betrachtet, dessen Kanten parallel sind zu den gegebenen Geraden C F, D E, so ist einleuchtend, daß diese beyden Cylinder sich durchschneiden, und daß ihre Durchschnittslinie aus zwey ebenen Kurven bestehen müße, die in den Vertikalebenen C D, E F gelegen sind; und daß diese Kurven sich selbst in einem Punkte schnitten, dessen Horizontalprojektion O ist. Dieser Punkt wäre der Durchschnitt zweyer horizontalen Kanten, die in der nemlichen tangirenden Ebene enthalten sind. Der Durchschnitt dieser Ebene und der beyden Vertikalebenen C D, E F bestimmte die horizontalen Tangenten zu der Durchschnittslinie der beyden Cylinder.

Dritte Aufgabe.

Man soll den Durchschnitt einer Kegelfläche von beliebiger Grundlinie, und einer Kugel konstruiren?

Wir nehmen hier an, die zwey Flächen seyen konzentrisch, weil wir dieses besonderen Falles für die folgende Aufgabe bedürfen.

309. Auflösung. (A, *a*) (Taf XXIX. Fig. 1.) sey der gemeinschaftliche Mittelpunkt der zwey Flächen; B C D E der gegebene Horizontalriß der Kegelfläche; *a′ m* der Halbmesser der Kugel und der Kreisbogen *l g′ f′ m* ein Stück der Gränze der Vertikalprojektion dieser Kugel.

Es ist einleuchtend, daß die mit dem Kegel konzentrische Kugel die beyden Netze dieser Fläche schneiden werde, und daß die Durchschnittslinie aus zwey abgesonderten, und in Bezug auf den Mittelpunkt der Kugel, symetrisch gelegenen Zweigen bestehe. Wir werden daher nur einen dieser Zweige, nemlich den auf dem unteren Netze der Kegelfläche gelegenen konstruiren; weil Alles von diesem unteren Zweige gesagte gleichmäßig von dem Oberen gilt.

Man denke sich durch den gemeinschaftlichen Mittelpunkt der zwey Flächen eine Reihe von Ebenen, welche man sämmtlich senkrecht auf eine der Projektionsebenen annehmen kann. In der Fig. 1. Taf. XXIX, haben wir dieselben vertikal angenommen. Jede von diesen Ebenen wird die Kegelfläche nach geraden Linien schneiden, und die Kugelfläche nach dem Umfang eines ihrer großen Kreise; und in jeder Ebene bestimmen die Begegnungen dieser Geraden mit dem Umfange des Kreises, Punkte des verlangten Durchschnittes. Man ziehe daher durch den Punkt A so viele unbestimmte Geraden C A E als man will, so hat man die Horizontalprojektionen eben so vieler Ebenen der Reihe. Jede dieser Vertikalebenen, wie A F, schneidet die Kegelfläche nach zwey Kanten, welche durch die Durchschnittspunkte C, E, des Risses B C D E, und der Geraden C A E gehen, und deren Vertikalprojektionen die Geraden *c a′*, *e a′* sind. Es bleiben nun die Begegnungspunkte dieser Kanten mit dem Schnitte der Kugel durch dieselbe Ebene zu finden.

Nachdem man zu diesem Zweck durch den Punkt A der Geraden F A D′ parallel zu der Projektionsaxe L M gezogen, denke man sich, daß die Vertikalebene C A E sich um die aus A errichtete Vertikale (A, *a a′*) drehe, bis sie parallel zur vertikalen Projektionsebene geworden sey; und daß sie überdies die in beyden Flächen gemachten Schnitte mit sich führe. Durch diese Bewegung werden die Punkte C, E nach G und F kom-

men, und wenn man diese letzten Punkte auf die Vertikalebene nach f, g projektirt und die Geraden $f\ a'$, $g\ a'$ zieht, so sind diese Geraden nebst dem Umkreise $f'\ g'\ m$ die Schnitte der Ebene und der beyden Flächen, in der Stellung betrachtet, die sie, vermöge der Bewegung der Ebene genommen haben. Die Begegnungspunkte f', g' der Geraden $f\ a'$, $g\ a'$ mit dem Umkreise, sind daher die Projektionen der Punkte des verlangten Durchschnittes, gleichfalls in der neuen Stellung der Ebene betrachtet. Diese Punkte f', g' geben nun zugleich die Höhen derselben Punkte des Durchschnittes über der Horizontalebene an; man ziehe daher durch dieselben die Horizontalen $f'\ h'$, $g'\ i$, so bestimmen diese durch ihr Zusammentreffen in h, i mit den entsprechenden Geraden $a'\ e$, $a'\ c$ die Vertikalprojektionen jener Punkte des Durchschnittes in ihrer natürlichen Stellung; und wenn man h und i auf die Gerade C A E nach H und J projektirt, bestimmt man die Horizontalprojektionen H, J derselben Punkte.

Es ist leicht zu ersehen, daß die Punkte H, I in der nemlichen Entfernung vom Punkt A seyen, wie die entsprechenden Punkte f', g' von der Vertikalen $a\ a'$. Dieser Umstand giebt ein Bewährungsmittel für die Genauigkeit der Konstruktionen, was hauptsächlich bey den zu schrägen Durchschnitten der Geraden C E mit den projektirenden Geraden von Nutzen ist.

310. Um die Tangente an einem Punkt (J, i) des Durchschnittes zu erhalten, suchen wir, wie in den vorhergehenden Beyspielen den Durchschnitt dieser Tangente durch die Horizontalebene, welcher letztere Punkt sich aus dem Zusammentreffen der Horizontalrisse der tangirenden Ebenen zu beyden Flächen an dem Punkt (J, i) ergiebt.

Nun aber ist die Tangente in C zu der Krummen B C D E offenbar der Riß der genannten tangirenden Ebene zu der Kegelfläche. Was den Riß der tangirenden Ebene zu der Kugel betrifft, so verfahre man bey den Umdrehungsflächen, indem man nemlich an dem Punkt g' zu dem Kreise $e\ f'\ g'\ m$ die Tangente $g'\ o$ zieht, welche verlängert die Gerade L M in einem Punkt o trifft; sodann $a\ o$ auf der E A von A nach O trägt, und durch den Punkt O die Gerade O P senkrecht auf C E zieht. Die zwey gefundenen Risse C P, O P schneiden sich in dem Punkt (P, p), und wenn man die Geraden P J, $p\ i$ zieht, so hat man die Projektionen der Tangente in dem Punkt (J, i) des Durchschnittes der zwey Flächen.

311. Die Vertikalprojektion $n\ h\ i\ k$ der Durchschnittslinie hat mehrere merkwürdige Punkte, welche auf den begränzenden Linien der Projektionen beyder Flächen liegen, und welche bestimmt werden müssen, wenn man die genannte Kurve mit Genauigkeit ziehen will.

Die Projektionen $a' b$, $a' d$ der äußersten Kanten der Kegelfläche können (Art. 128) als die Projektionen von tangirenden Ebenen zu der Fläche betrachtet werden, welche senkrecht auf die Vertikalebene sind, woraus folgt, daß diese Projektionen $a' b$, $a' d$ auch die Krumme $n\ h\ k\ i$ in Punkten wie n, k berühren.

Man bestimme, um diese Punkte zu finden, vorerst die Kanten (A B, $a' b$), (A D, $a' d$) der Kegelfläche, deren Vertikalprojektionen die Gränzen der Vertikalprojektion der Fläche sind, was bey dem besonderen Falle eines elliptischen Kegels nach dem Verfahren geschieht, welches wir Art. 87. angegeben haben.

Nachdem dieses geschehen, beschreibe man aus A als Mittelpunkt, und mit den Halbmessern A B, A D Kreisbögen, welche die Gerade A F in den Punkten B′, D′ treffen; diese letzteren projektire man auf die L M nach b', d'; zieht man sodann Geraden $a'\ b'$, $a'\ d'$, welche den Kreisbogen $m\ f'\ g'$ in n', k' schneiden, und durch diese Punkte n', k' die Horizontalen $n'\ n$, $k'\ k$, so treffen diese in den Punkten n, k mit den Gränzen $a'\ b$, $a'\ d$ der Vertikalprojektion des Kegels zusammen. Die Senkrechten n N, k K auf L M treffen die Geraden A B, A D in den Punkten N, K der Horizontalprojektion N I K H des Durchschnittes des Kegels und der Kugel.

Die auf dem Kreise $g'\ f'\ m$ gelegenen Punkte der Krummen $n\ i\ k\ h$ ergeben sich sehr einfach, denn sie sind die Durchschnitte des Meridians (F A, $n'\ f'\ g'\ m$) der Kugel mit den in derselben Ebene enthaltenen Kanten der Kegelfläche. Konstruirt man eine dieser Kanten wie (A X, $a'\ x$), so ergiebt sich der Punkt (R, r), als derjenige, in welchem sie die Kugelfläche durchschneidet, und r ist folglich der Berührungspunkt des Kreises mit der Krummen $n\ i\ k\ h$. Auf dieselbe Weise bestimme man den ähnlichen Punkt r'. Die Kurve $n\ h\ k\ i$ hat einen doppelten Punkt ω, welcher auf einer Geraden $a\ \varepsilon'$ liegt, die durch den Punkt a', der Vertikalprojektion des Mittelpunkts der Kegelfläche, und durch den Punkt ε', der Vertikalprojektion des Punkts ε, geführt ist. Dieser letzte Punkt ε ist der Durchschnitt der zu L M parallelen Geraden F A D′ und des Durchmessers B D. Denn dieser Durchmesser (Art. 87) schneidet die Sehne $\pi\,\varepsilon\,\pi'$ der Ellipse in zwey gleiche Theile, und da die Mitte ε auf der Geraden F A G liegt, so folgt daraus, daß die Geraden A $\omega'\ \pi$, A $\omega''\ \pi'$ gleich sind. Betrachtet man diese Geraden als die Projektionen zweyer Vertikalebenen, die dem System der die zwey Flächen schneidenden Ebenen angehören, so projektiren die in diesen Ebenen enthaltenen Kanten sich auf die Vertikalebene, nach der einzigen Geraden $a'\ \varepsilon'$, und sie werden von der Kugel in zwey Punkten geschnitten, die auf der Horizontalen ($\omega'\ \omega''$, ω) liegen. Der Durchschnitt der zwey bekannten Geraden $\omega'\ \omega$, $a'\ \varepsilon'$ bestimmt den doppelten Punkt ω der Krummen $n\ i\ \omega\ k\ h$.

Vierte Aufgabe.

Man soll die Aufwicklung einer Kegelfläche von beliebiger Grundlinie konstruiren, und auf der aufgewickelten Fläche einen Schnitt derselben übertragen, dessen zwey Projektionen bekannt sind?

312. Auflösung. Man denke sich eine Kugel von beliebig genommenem Halbmesser, welche konzentrisch mit der Kegelfläche ist, und man konstruire, wie wir es in der vorstehenden Aufgabe gethan haben, die Projektionen des Durchschnittes dieser zwey Flächen. Nachdem dieses geschehen, sieht man leicht ein, daß alle Punkte des sphärischen Durchschnittes auch in gleicher Entfernung von dem Mittelpunkte des Kegels seyen, und daß sie sich daher auch auf der aufgewickelten Fläche in gleicher Entfernung vom Mittelpunkt befinden müssen, und folglich auf einem Kreisbogen, welcher aus diesem Mittelpunkt, und mit einem Halbmesser gleich jenem der Kugel beschrieben ist. Wenn man daher einen Punkt R (Fig. 3 Taf. XXIX.) als den Mittelpunkt der aufgewickelten Kegelfläche annimmt, und aus demselben mit einem Halbmesser gleich $a' m$ (Fig. 1.) einen unbestimmten Kreisbogen S T U beschreibt, so werden sich auf diesen Bogen alle Punkte des sphärischen Schnittes auflegen, so daß die Theile dieses Bogens wechselsweise gleich sind den entsprechenden Theilen des sphärischen Schnittes. Es handelt sich nun, nachdem man auf diesem Durchschnitt einen beliebigen Punkt als Ursprung genommen, zum Beyspiel den Punkt ($R' r'$) (Fig. 1.) und einen Punkt S (Fig. 3.) als seinen correspondirenden auf der aufgewickelten Fläche, die verschiedenen Bögen des sphärischen Durchschnittes aufzuwickeln, und dieselben nacheinander auf den Kreisbogen S T U von S nach den Punkten T....rc. zu tragen. Zu diesem Ende muß man der sphärischen Linie, da sie von doppelter Krümmung ist, nach und nach ihre zwey Krümmungen entziehen, ohne ihre Größe zu alteriren, was auf folgende Weise geschieht.

Die sphärische Durchschnittslinie ist auf der Horizontalebene in R J K H (Fig. 1.) projektirt, und man kann sie betrachten, als auf einer vertikalen Cylinderfläche verzeichnet, deren Basis R J K H wäre. Man kann daher diese Fläche aufwickeln, wie wir es (Taf. XX. Fig 2.) gezeigt haben, und auf diese aufgewickelte Cylinderfläche den sphärischen Durchschnitt übertragen, indem man den Bogen $R' J$ (Taf. XXIX. Fig. 1.) nach $R'' J'$ (Fig 2.) aufwickelt, und alsdann die Vertikale (J, $i' i$) (Fig 1.) senkrecht auf $R'' R''$ (Fig. 2.) von J' nach J'' trägt. Die Krumme $R''' J'' H'' R'''$, welche durch alle, auf diese Art bestimmten Punkte J''... geht, ist die sphärische Durchschnittslinie, ihrer horizontalen Krümmung benommen, unbeschadet ihrer Länge. Man erhält die Tan-

gente am Punt J″ dieser Krummen, wenn man J P (Fig. 1.) nimmt, dieselbe auf der R″ R″ (Fig. 2.) von J′ nach P′ trägt, und die Gerade J″ P′ zieht.

Ist dieses geschehen, so wickle man die Krumme R‴ J″ H″ R‴ (Fig. 2.) auf, um sie wieder nach dem Kreisbogen S T U (Fig. 3.) zu biegen: zum Beyspiel, man trage den Bogen R‴ J″ von S nach T, so ist T auf der aufgewickelten Fläche der Punkt, wohin sich der Punkt (J, *i*) (Fig. 1.) des sphärischen Schnittes auflegt. Wenn man daher die Gerade R T zieht, so hat man auf der Aufwicklung der Fläche die Stellung der Erzeugungslinie (A C, *a c*); (Fig. 1.): wenn endlich auf dieser Erzeugungslinie ein Punkt läge, den man auf die Aufwicklung übertragen sollte, wie der Punkt (C, *c*), so braucht man nur die Entfernung (Fig. 1) dieses Punkts vom Mittelpunkt der Kegelfläche zu nehmen, und sie (Fig. 3) auf der R T von R nach V zu tragen, so ist der Punkt V auf der aufgewickelten Fläche derjenige, den man betrachtet hat, und die Linie Y V W X der er angehört, ist die, auf dieselbe Aufwicklung übergetragene elliptische Grundlinie B C D E der Kegelfläche.

Die Tangente C P (Fig. 1) der Ellipse und die Tangente zu dem sphärischen Durchschnitt am Punkt (J, *i*) schließen mit dem Stücke (C J, *c i*) der Erzeugungslinie des Kegels ein in (J, *i*) rechtwinkliches Dreyeck ein, welches, da dasselbe in einer tangirenden Ebene zu der Kegelfläche enthalten ist, in der Aufwicklung sich nicht verändert; wenn man daher durch den Punkt T (Fig. 3) die Senkrechte T P″ auf die Gerade R T errichtet, auf dieser Senkrechten sodann die Länge (J P, *i p*) von T nach P″ trägt, und das rechtwinklige Dreyeck P″ T V vollendet, so ist die Seite P″ V Tangente zu der Krummen Y V W X, der Aufwicklung der elliptischen Basis B C D E der gegebenen Kegelfläche.

Fünfte Aufgabe.

Es sind zwey beliebige Kegelflächen gegeben; man soll ihren wechselseitigen Durchschnitt konstruiren?

313. Auflösung. Wir wählen als Beyspiel zwey schiefe Kegel, einen von kreisförmiger, und einen von elliptischer Basis, deren Axen in einer Ebene liegen, und wir nehmen die vertikale Projektionsebene parallel mit dieser Ebene an.

Es sey demnach (B, *b*) Taf XXX der Mittelpunkt der ersten Fläche und der Kreis Y D Z G ihre auf der Horizontalebene gegebene Grundlinie; (A, *a*) sey der Mittelpunkt der zweyten Fläche und die Ellipse V M X H ihre Grundlinie. Man führe durch die beyden Mittelpunkte eine Gerade (A B, *a b*) und konstruire ihren Durch-

schnittspunkt (I, i) mit der Horizontalebene. Durch diese Gerade (A B, a b) nehme man eine Reihe von Ebenen an, von welchen jegliche die beyden Kegelflächen nach zwey geraden Linien schneidet; so werden die geraden Schnitte der einen Fläche durch ihr Zusammentreffen mit den, in einerley Ebenen enthaltenen Schnitten der zweyten Fläche, die Punkte ihres wechselseitigen Durchschnittes bestimmen.

Die Horizontalrisse aller dieser Ebenen gehen nothwendig durch den Punkt I; man ziehe daher durch diesen Punkt die Tangenten zu einer von den Grundlinien der beyden Kegel, welche zu der andern Grundlinie entweder ebenfalls Tangenten sind oder Sekanten, wie in I E, I F in unserer Figur. Diese Tangenten sind die Horizontalrisse der äußersten schneidenden Ebenen; diejenige schneidende Ebene, deren Riß außerhalb des Winkels E I F fiele, könnte nicht beyden Flächen zugleich begegnen, und folglich keine Punkte des zu suchenden Durchschnittes enthalten. Der eine begränzende Riß I F schneidet die Grundlinie des einen Kegels in den Punkten D, D′, zieht man die Kanten (B D, b d), (B D′, b d') dieses Kegels und die Kante (A F, a f) des Zweyten, welche Letztere die beyden Ersten in den Punkten (α, α'), (γ, γ') des Durchschnittes trifft, so hat man in (B D, b d), (B D′, b d') zugleich auch die Tangenten zu der Durchschnittslinie an denselben Punkten; denn die genannten Kanten können als die Durchschnitte der, durch die Punkte (α, α'), (γ, γ') zu beyden Kegeln geführten tangirenden Ebenen betrachtet werden. Dieselbe Bemerkung gilt für die Punkte des Durchschnittes, welche man mittelst des Risses I E erhält.

Eine schneidende Ebene, deren Riß I G H in dem Winkel E I F liegt, trifft die Basis des ersten Kegels in den Punkten G, G′, und die des zweyten in den Punkten H, H′; wenn man durch diese Punkte die entsprechenden Kanten (B G, b g), (B G′, b g') und (A H, a h), (A H′, a h') der zwey Kegel zieht, so gehören die wechselseitigen Begegnungspunkte (P, p), (Q, q), (R, r), (S, s) dieser in einer nemlichen Ebene enthaltenen Kanten, dem Durchschnitte der zwey Flächen an. Bey einer jeden andern angenommenen Ebene, wiederhole man diese Operation und man erhält jedesmal einen entsprechenden Punkt mit (P, p), einen entsprechenden **Punkt** mit (Q, q), mit (R, r) und mit (S, s); alle auf diese Art analogen **Punkte** bemerke man mit dem gleichen Zeichen, weil sie offenbar einem nemlichen Zweige angehören. Wenn die zu konstruirende Durchschnittslinie geschlossene Zweige hat, so werden sich diese Zweige an den Punkten, welche durch die begränzenden Ebenen erhalten wurden, in einen Einzigen vereinen, wie bey (γ, γ'). Es ist daher rathsam, die Konstruktion von einer solchen Ebene ausgehend zu beginnen.

314. Wir haben bey dem Durchschnitte zweyer Cylinder (Art. 203) gesehen,

daß die Projektion dieses Durchschnittes auf der Ebene der beyden Grundlinien, unabhängig von der zweyten Projektionsebene konstruirt werde, sobald die zu den Erzeugungslinien der beyden Cylinder parallele Ebene bekannt ist. Derselbe Fall findet bey der vorliegen Aufgabe statt, sobald die Gerade (A B, a b), welche die Mittelpunkte beyder Flächen verbindet, bestimmt ist. Es folgt hieraus, daß in allen zwey Fällen die Horizontalprojektionen des Durchschnittes die gleichen bleiben, während die Neigungen der Erzeugungslinien bey den Cylindern, oder die Höhen der Mittelpunkte bey den Kegeln, verschiedene Stellungen annehmen können.

Wenn man jedoch die Punkte der Horizontalprojektion des Durchschnittes der zwey Kegelflächen verlangt, die auf der Geraden A B liegen, indem man diese Gerade als den Riß einer Ebene der angenommenen Reihe betrachtet, so lassen sich diese Punkte nur aus der Vertikalprojektion herleiten, indem man die Vertikalprojektonen $a\,v$, $a\,x$, $b\,y$, $b\,z$ der Kanten bestimmt, nach denen die Ebene A B die beyden Kegel schneidet, und die Begegnungspunkte δ', ε', β' ζ', dieser Geraden auf die Gerade A B nach δ, ε, β, ζ projektirt.

315. Diejenigen Ebenen der angenommenen Reihe, welche durch die Punkte X, Z, V, Y geführt sind, durch welche diejenigen Kanten beyder Flächen gehen, deren Vertikalprojektion die Gränze der Projektion der Fläche bilden, geben im Allgemeinen Punkte der Durchschnittslinie und zugleich die Vertikalprojektionen der Tangenten an denselben Punkten. Aber in unserm angenommenen Beyspiele, fallen alle diese Hülfsebenen mit der einzigen Vertikalebene Y A B Z zusammen, und die Tangente an irgend einem der genannten Punkte, (δ, δ') zum Beyspiel, ist in den zwey, auf die vertikale Projektionsebene senkrechten Ebenen $a\,v$, $b\,y$ enthalten; sie ist folglich ebenfalls senkrecht auf die Vertikalebene und ihre Vertikalprojektion fällt mit dem Punkt δ, zusammen. Derselbe Fall ist bey den Punkten (ε, ε'), (β, β'), (ζ, ζ'); die Tangenten an diesen Punkten sind senkrecht auf die Ebene Y A B Z. Es ergiebt sich hieraus, daß die Begränzungslinien $v\,a$, $x\,a$, $y\,b$, $z\,b$ der Vertikalprojektion beyder Kegel dieselbe Projektion ihrer Durchschnittslinie nicht berühren, sondern daß diese Projektionen an jenen Begränzungslinien scharf aufhören.

Dieses mit unserm in Art. 128. allgemein aufgestellten Satze im Widerspruch zu stehen scheinende Resultat folgt allein daraus, daß wir die beyden sich durchschneidenden Kegelflächen symetrisch auf eine Ebene angenommen haben, die zu einer Projektionsebene parallel ist. Die Durchschnittslinien der beyden Flächen muß deßhalb ebenfalls symetrisch seyn, in Bezug auf die Symetrieebene der Flächen, und die auf beyden Seiten dieser

Ebene gelegenen Theile der Durchschnittslinie, müssen sich auf die Ebene der Symetrie nach einer und derselben Linie projektiren.

Die Vertikalprojektionen $\beta' r \alpha'$, $\delta' p q \varepsilon'$, $\zeta' s$ der verschiedenen Zweige, sind daher an den Punkten β', δ', ε' ζ' kurz abgeschnitten, und sie entsprechen als Projektionen nur in dieser Ausdehnung der wirklichen Durchschnittslinie. Betrachtet man aber die genannten Linien $\beta' r \alpha'$, $\delta' p q \varepsilon'$, $s \zeta'$ als für sich bestehende Zweige einer geometrischen Linie, so können sie, zufolge des Gesetzes der Stetigkeit, dem alle geometrischen Kurven unterliegen, in β', δ' ε', ζ' nicht scharf abgebrochen seyn; sie müssen in sich selbst zurücklaufen, oder sich ins Unendliche ausdehnen. Obschon man daher durch die Konstruktionen, welche die gezeichneten Stücke der genannten Linie gaben, keine weiteren Punkte derselben mehr erhalten kann, so darf man daraus keine weitere Folgerung ziehen, als die, daß das Gesetz jener Konstruktionen nicht der ganzen Kurve, sondern blos einem gewissen Theile derselben entspreche, und so muß allein der Umstand erklärt werden, daß wenn man die Tangente an den Punkten δ', ε' der Kurve $\delta' p q \varepsilon'$ verlangt, man durch die gewöhnlichen Konstruktionen zu keinem Resultate komme, nicht aber als ob die Kurve an jenen Punkte keine Tangenten habe. Wir werden weiter unten bey einem ähnlichen Falle (Art. 326.) die Konstruktion derartiger Tangenten zeigen.

Wenn die Ebenen I X, I Z, I V, I Y von einander verschieden wären, so erhielte man mittelst dieser Ebenen Punkte der Durchschnittslinie, deren Vertikalprojektionen auf den Geraden $v a v'$, $x a x'$, $y b y'$, $z b z'$ lägen, und welche zugleich die Berührungspunkte dieser Geraden mit der Vertikalprojektion der Durchschnittslinie wären. Auf gleiche Weise würden, wenn die Projektionen A, B der Mittelpunkt beyder Flächen nicht innerhalb ihrer respektiven Grundlinien fielen, die Horizontalprojektionen beyder Kegel durch gerade Linien begränzt werden, und die Hülfsebenen, welche durch die Berührungspunkte dieser begränzenden Geraden mit den zugehörigen Grundlinien geführt wären, gäben Punkte des Durchschnittes, denen Tangenten entsprächen, welche als Horizontalprojektionen eben jene begränzenden Geraden hätten. Diese beyden Resultate sind ganz analog mit den im Art. 305. angeführten.

316. Zwey Cylinder, deren Basen geschlossene Kurven sind, können sich nur nach einer geschlossenen Kurve von einem einzigen, oder von zwey abgesonderten Zweigen durchschneiden. Ihre Durchschnittslinie erstreckt sich nur alsdann ins Unendliche, wenn die Basis eines Cylinders, oder auch die von beyden, Kurven von unendlichen Zweigen sind, zum Beyspiel Parabeln oder Hyperbeln. Die Durchschnittslinie zweyer Kegelflächen von geschlossenen Basen, können aber aus geschlossenen und unendlichen Zweigen zusammengesetzt seyn, und die nöthige Bedingung, daß das Letztere statt finde, ist, daß beyde Kegel

einige paralle Kanten haben; denn da jeder Punkt der Durchschnittslinie zweyer Kegelflächen durch die Begegnung zweyer von ihren Karten bestimmt ist, so kann offenbar ein solcher Punkt nicht im Unendlichen gelegen seyn, außer wenn die beyden Kanten parallel unter sich wären.

Um die parallelen Kanten zweyer sich durchschneidenden Kegelflächen aufzufinden, denke man sich, daß während der eine Kegel in unveränderlicher Stellung bleibt, der Andere dergestalt versetzt werde, daß sein Mittelpunkt mit jenen des ersten zusammenfalle, wobey jedoch alle seine Kanten parallel zu ihrer anfänglichen Stellung geblieben seyen. In dieser Lage schneide man beyde Kegel durch eine nemliche Ebene, so wird man als Schnitte zwey Kurven erhalten, die sich entweder selbst schneiden, oder berühren, oder gar keinen Punkt miteinander gemein haben. Wenn die Kurven sich schneiden oder berühren, und man denkt sich die, durch die Begegnungs- oder Berührungspunkte gehenden Kanten des ersten Kegels, so gehören diese zugleich auch dem versetzten Kegel an, und auf seiner ursprünglichen Stellung müssen diesen so gefundenen Kanten nothwendig eben so viele Parallelen entsprechen. Die Durchschnittslinie der zwey vorgelegten Kegelflächen muß daher in diesem Falle einen, oder ettliche sich ins Unendliche erstreckende Zweige haben.

Wenn die beyden oben genannten Kurven sich weder schneiden noch berühren würden, so wäre dies ein Beweis, daß die beyden Kegel keine parallelen Kanten hätten, und daß die Linie ihres wechselseitigen Durchschnittes nur aus geschlossenen Zweigen bestehen könnte.

317. In der Zeichnung der Tafel XXX. sind die gegebenen Kegelflächen von kreisförmiger und elliptischer Grundlinie. Der elliptische Kegel, dessen Mittelpunkt in (A, a) ist, wird durch die horizontale Ebene $f' n$ wiederum nach einer Ellipse $(F' V' K', f' v')$ geschnitten, die man nicht nöthig hat punktweise zu konstruiren, weil sie der Basis $V E H F$ ähnlich, und ihre Axen sich folglich zu denen der Basis verhalten, wie die Entfernungen der Mittelpunkte beyder Ellipsen zu dem Mittelpunkte der Fläche. Nimmt man den zweyten Kegel parallel zu seiner Urstellung so versetzt an, daß sein Mittelpunkt (B, b) nach (A, a) zu liegen komme, so wird er durch dieselbe Horizontalebene $f' n$ nach dem Kreise $(M' \psi' K', f' \psi)$ geschnitten werden.

Zur Bestimmung der Horizontalprojektion $M' \psi' K'$ dieses Kreises ziehe man durch (A, a) eine Parallele $(A \varphi, a \varphi')$ zu der Geraden $(B \chi, b \chi')$, der Axe des zweyten Kegels. Der Durchschnittspunkt (φ, φ') dieser Parallelen mit der Ebene $f' n$ bestimmt den Mittelpunkt φ jenes gesuchten Kreises, und der Durchschnitt (ψ, ψ')

derselben Ebene mit einer durch (A, a) gezogenen Parallelen zu einer Kante ($B X$, $y b y'$) giebt einen Punkt ψ' seines Umfanges.

Der Kreis $M' \psi' K'$ und die Ellipse $F' V' K'$ schneiden sich nun in zwey Punkten K' und M'; zieht man durch diese Punkte, und durch A, die Geraden $K' A K$, $M' A M$, sodann durch B zu diesen Geraden die Parallelen $\varkappa' B \varkappa$, $\mu' B \mu$, so hat man offenbar die Horizontalprojektionen von vier, wechselsweise zu zwey und zwey parallelen Kanten beyder gegebenen Kegelflächen. Die Durchschnittslinie dieser Flächen muß daher nothwendig Punkte im Unendlichen haben.

Betrachtet man aufmerksam die Stellung der beyden Flächen, so wird man einsehen, daß die Kanten des elliptischen Kegels, welche dem Bogen $K X M$ seiner Grundlinie angehören, den kreisförmigen Kegel in den Punkten des unendlichen Zweiges ($\alpha \beta R$, $\beta' r \alpha'$) treffen, die Kanten jenes ersten Kegels hingegen, die dem elliptischen Bogen $M V K$ angehören, treffen das obere Netz des kreisförmigen Kegels, und zwar in den Punkten, des gleichfalls ins Unendliche sich ausdehnenden Zweiges ($S \zeta S'$, $\zeta' s$).

Im Vorbeygehen wollen wir hier noch anführen, daß man mittelst der Hülfsebenen, deren Risse zwischen $M \mu I$ und $F I$ fallen, Punkte des unteren unendlichen Zweiges findet, die auf dem Bogen $\alpha \omega$ zwischen dem Punkt α und dem Unendlichen gelegen sind. Diese Punkte haben keine analogen auf den übrigen Zweigen des Durchschnittes.

318. Die Tangente an einem Punkte des Durchschnittes zweyer Kegelflächen entsteht aus dem Durchschnitte der Ebenen, welche durch denselben Punkt tangirend zu den beyden Flächen geführt sind. Hat die Durchschnittslinie der zwey Kegel unendliche Zweige, so können diese auch Tangenten an den im Unendlichen gelegenen Punkten haben. Diese Tangenten, welche, wie schon bemerkt, Asymptoten heißen, werden, wie die gewöhnlichen Tangenten gebildet, nemlich aus dem Durchschnitte der, durch die Punkte im Unendlichen zu beyden Flächen geführten tangirenden Ebenen. Nun kann man nach dem im vorigen Artikel vorgetragenen Verfahren, die unter sich parallelen Kanten zweyer Kegelflächen finden, auf welchen Kanten, die im Unendlichen liegenden Punkte des Durchschnittes dieser Kegel sich befinden. Konstruirt man daher die Ebenen, welche die beyden Kegel nach ihren parallelen Kanten berühren, so werden diese tangirenden Ebenen, wenn sie anders nicht parallel sind, sich durchschneiden, und diese geraden Durchschnitte sind die Asymptoten zu der Durchschnittslinie der beyden Kegelflächen.

In unserer Figur (Taf. XXX.) kennen wir bereits die Horizontalprojektionen $K' A K$, $M' A M$, $\varkappa' B \varkappa$, $\mu' B \mu$ aller unter sich parallelen Kanten beyder gegebenen Kegel; zieht man daher durch die Punkte K, $\varkappa$, wo zwey solcher parallelen Kanten auf die Horizontalebene treffen, zu den beyderseitigen Grundlinien der Kegel die Tangenten

K L, $\varkappa$ L, so hat man die Horizontalrisse der Ebenen, welche die Kegel nach denselben Kanten berühren.

Der Begegnungspunkt L dieser Risse ist ein Punkt der einen Asymptote des Durchschnittes der beyden Kegel. Diese Asymptote muß überdies parallel zu den in K′ A K oder $\varkappa'$ B $\varkappa$ projektirten Geraden seyn, weil jede der zwey Ebenen, deren Durchschnitt sie ist, durch eine dieser Geraden geht; daher ist die durch L gezogene Parallele L L′ zu $\varkappa'$ B $\varkappa$ die Horizontalprojektion der gesuchten Asymptote; diese Projektion ist einerseits Asymptote zu dem Zweige α β R und anderer Seits Asymptote zu dem Zweige ζ S. Die Horizontalprojektion der Zweyten Asymptote, welche symetrisch mit der Ersten ist, in Bezug auf die Ebene A B I bestimmt sich auf die ganz gleiche Weise. Die beyden Asymptoten haben als gemeinsame Vertikalprojektion eine Parallele zu der Geraden $m\ a\ m'$, der Vertikalprojektion von K′ A K und M′ A M, und welche nur um die Tafel nicht zu überfüllen weggelassen sind. Diese Projektion wäre Asymptote zu den zwey Kurven $\alpha'\ r\ \beta'$, $s\ \zeta$.

319. Wenn die beyden Kurven F′ V′ K′ und K′ ψ' M′ statt sich zu schneiden, sich in einem oder in zwey Punkten berührten, so hätte jede Kegelfläche eine oder zwey Kanten, deren jeder eine Parallele auf der Andern entspräche; aber es ist leicht einzusehen, daß die Ebenen, welche die beyden Kegel nach diesen Kanten berührten, zu zwey und zwey parallel unter sich seyn müßten, weil sie wechselseitig durch zwey parallele Kanten und zwey parallele Tangenten giengen, und daß die Durchschnittslinie der Kegel, obgleich sie sich ins Unendliche erstreckte, dennoch keine Asymptoten hätte, oder vielmehr daß ihre Asymptoten ganz im Unendlichen lägen.

Wir bemerken noch, daß wir auf der Tafel XXX die beyden Kegelflächen an den Horizontalebenen L M, $f'\ n$ beendigt angenommen haben, weil ihre Horizontalprojektionen, zufolge der angenommenen Stellung der Mittelpunkte, außerdem durchaus unbegränzt und die Zeichnung deßhalb zu undeutlich geworden wäre.

320. Bey zwey Kegeln vom zweyten Grad, wie in unserm angenommenen Beyspiele, besteht die Linie ihres gemeinschaftlichen Durchschnittes außer den geschlossenen Zweigen, entweder noch aus parabolischen Zweigen ohne Asymptoten, oder aus hyperbolischen Zweigen mit zwey oder vier Asymptoten.

Die Anzahl dieser Zweige hängt von den respektiven Stellungen der beyden Kegel ab. Auf welche Art übrigens die verschiedenen Zweige zusammengesetzt seyn mögen, so können ihre Projektionen von einer Geraden in nicht mehr als in vier Punkten geschnitten werden. Befände sich der Mittelpunkt des einen Kegels auf der Fläche des Andern, so wäre dieser Mittelpunkt zugleich ein Punkt der Durchschnittslinie, und die Projektion

dieses Punkts auf einer Ebene würde die Stelle eines Zweiges vertreten. Dieses Beyspiel zeigt in der Geometrie, was man in der Theorie der krummen Linien unter zusammengehörigem Punkte (punctum conjugatum, point isolé) verstehe.

Ist der Scheitel des einen Kegels auf der Fläche des Andern und diese Kegel haben noch eine Kante gemein, so ist diese Kante ein Zweig des Durchschnittes und die Zweige, welche diese Kurve vervollständigen können durch die gerade Linie nur in drey Punkten geschnitten werden.

Sechste Aufgabe.

Man soll den Durchschnitt eines Cylinders und eines Kegels konstruiren?

321. Auflösung. Sind die Grundlinien des Kegels und des Cylinders auf einer Projektionsebene bestimmt, so wähle man als System durchschneidender Hülfsebenen, eine Reihe von Ebenen, welche durch den Mittelpunkt des Kegels, parallel zu den geraden Erzeugungslinien des Cylinders geführt sind. Diese Ebenen werden beyde Flächen nach geraden Linien schneiden, welche sich in Punkten des zu konstruirenden Durchschnittes begegnen.

Man ziehe daher durch den Mittelpunkt des Kegels eine Parallele zu einer Kante des Cylinders, und konstruire den Begegnungspunkt dieser Parallelen mit der Ebene der Grundlinien beyder Flächen. Durch diesen Punkt müssen die Risse aller durchschneidenden Hülfsebenen auf der Ebene der Grundlinien gehen.

Die Bestimmung der begränzenden Ebenen der angenommenen Reihe, und die Konstruktion der merkwürdigen Punkte ist ganz ähnlich mit der, welche wir bey der Konstruktion des Durchschnittes zweyer Kegel und zweyer Cylinder angewendet haben.

Sind die gegebenen Grundlinien des Kegels und des Cylinders geschlossene Linien, so kann ihre Durchschnittslinie aus geschlossenen oder unendlichen Zweigen bestehen. Um dieses im Voraus zu erkennen, bemerke man nur, ob die durch den Mittelpunkt des Kegels geführte Parallele zu den Kanten des Cylinders, die Ebene der Grundlinie des Kegels in einem Punkte des Umfanges dieser Grundlinie trifft, oder nicht. Findet das Letztere statt, so haben die beyden Flächen offenbar keine parallelen Kanten, und die aus ihrem Durchschnitte entstehende Linie hat blos geschlossene Zweige. Trifft aber die Parallele auf einen Punkt des Umfanges der Basis des Kegels, so sind alle Kanten des Cylinders parallel zu einer Kante des Kegels, und die tangirende Ebene zu dem Kegel an dieser Kante ist eine asymptotische Ebene der Durchschnittslinie des Kegels und des Cylinders. Wir überlassen dem Leser die Ausführung dieser Konstruktionen.

Siebente Aufgabe.

Es sind zwey Umdrehungsflächen gegeben, deren Axen sich in einem Punkte begegnen man soll die Durchschnittslinie dieser Flächen konstruiren?

322. Wir wählen als Beyspiel der zwey Umdrehungsflächen ein Hyperboloid und und ein Paraboloid, und um die einfachsten Konstruktionen zu erhalten, wählen wir die Projektionsebenen dergestalt, daß die Horizontalebene, zum Beyspiel, senkrecht auf eine der beyden Axen sey, und die Vertikalebene parallel zu beyden Axen.

Bisher haben wir die Punkte des Durchschnittes zweyer Flächen bestimmt, indem wir jeden dieser Punkte, als den Begegnungspunkt zweyer Schnitte betrachteten, die in beyden Flächen durch eine nemliche Ebene gemacht wurden; und wir haben bey jedem einzelnen Falle dasjenige System durchschneidender Ebenen aufzufinden gesucht, welche die vorgelegten Flächen nach den am leichtesten zu konstruirenden Linien schnitten. Wie wir aber bereits (Art. 290.) bemerkt haben, so kann manchmal das System von durchschneidenden Ebenen mit Vortheil durch ein System durchschneidender krummer Flächen ersetzt werden. Dieser Fall findet bey dem vorliegenden Beyspiele statt.

Man betrachte den Begegnungspunkt der beyden gegebenen Axen als gemeinsamen Mittelpunkt einer Reihe von Kugeln, welche jede der beyden Umdrehungsflächen, nach dem Umfange von Kreislinien schneiden, deren Mittelpunkt auf den entsprechenden Axen liegen, und deren Ebenen senkrecht auf dieselben Axen sind. Zwey Kreise, deren Ebenen gegen einander geneigt sind, können sich nur auf der geraden Durchschnittslinie ihrer Ebenen begegnen. Wenn diese Gerade einen der Kreise trifft, so gehören die Begegnungspunkte der Durchschnittslinie der beyden Flächen an.

Es sey demnach (A, $a\ a'$) (Taf. XXXI.) die Axe des Hyperboloids und $c\ l\ e$, $e\ m\ c$ der Erzeugungsmeridian dieser Fläche; (A B, $a'\ b$) sey die geneigte Axe des Paraboloids, so daß (A, a') der Begegnungspunkt der zwey Axen, und daß ihre Ebene A B parallel zu der vertikalen Projektionsebene ist; $f\ d\ h\ n$ sey der Erzeugungsmeridian des Paraboloids. Eine Kugel, deren Mittelpunkt in (A, a'), und deren Halbmesser gleich $a'\ s$ ist, wird von der Meridianebene A B nach einem größten Kreise $i\ k\ m\ p$ geschnitten. Diese Kugel schneidet das Hyperboloid nach zwey horizontalen Kreisen, welche als Durchmesser die Sehnen $l\ m$ und $k\ o$ haben; dieselbe Kugel schneidet das Paraboloid nach zwey Kreisen, deren Ebenen senkrecht auf (A B, $a'\ b$) sind, und deren Durchmesser gleich den Sehnen $i\ q$ und $n\ p$ sind.

Die Ebenen der vier genannten Kreise, welche sonach sämmtlich senkrecht auf die Vertikalebene A B sind, schneiden sich daher nach vier horizontalen Geraden; und da die Kreise

auf einer nemlichen Kugel liegen, so gehören ihre vertikal in r, u, z projektirten Durchschnittspunkte dem zu bestimmenden Durchschnitte an.

Um die Horizontalprojektion eines dieser Punkte zu erhalten, zum Beyspiel des in r projektirten, konstruire man die Horizontalprojektion K R R′ des Kreises $k\ r\ u$, und ziehe durch r auf die Projektionsaxe die Senkrechte R r, so sind die Punkte R, R′ wo diese den Umkreis R K R′ trifft, die gesuchten Horizontalprojektionen, so daß die zwey Punkte (R, r), (R′, r) zwey Punkte der verlangten Durchschnittslinie sind.

Indem man den Halbmesser der durchschneidenden Hülfskugeln verändert, findet man so viele andere Punkte dieser Durchschnittslinie als man verlangt. In unserm Beyspiele besteht dieselbe aus zwey geschlossenen Zweigen (R U T R′ V, $t\ r\ u\ v$), (Y Z W Z′, $y\ z\ w$).

323. Bey den so eben angewendeten Konstruktionen ist zu bemerken, daß die Sehnen $l\ m$, $i\ q$ und ihre entsprechenden in den andern Kreisen, sich in Punkten wie x schneiden können, welche Punkte, da sie nicht mehr innerhalb der Begränzungslinien $c\ l\ e$, $e\ m\ c$, $f\ d\ h$ der Projektionen beyder Flächen fallen, offenbar als Projektionen keinen Punkten der Durchschnittslinie mehr entsprechen können.

Es findet hier ganz der ähnliche Fall statt, wie bey den Konstruktionen Art. 315. Die Durchschnittslinie der zwey gegebenen Umdrehungsflächen ist symetrisch, in Bezug auf die, den beyden Flächen gemeinsame Meridianebene A B. Die Projektionen der zwey symetrischen Theile diese Linie auf der Ebene der Symetrie, fallen deßhalb in eine einzige Linie zusammen, welche Linie selbst nur ein Stück einer sich ins Unendliche erstreckenden Linie von zwey Zweigen ist. Obgleich aber dieselben Konstruktionen, mittelst welcher die Punkte dieser Linie erhalten wurden, die als Projektionen den Punkten der Durchschnittslinie entsprechen, auch noch angewendet werden können, um weitere Punkte der Linie $y\ z\ w$, $t\ r\ u\ v$ zu finden, so entspricht doch das Gesetz dieser Konstruktionen nicht der Linie in ihrer ganzen Ausdehnung, sondern nur einem gewissen Theile derselben. Zu beyden Zweigen $t\ u\ v$, $z\ w$ können zum Beyspiel keine größeren Kreise angewendet werden, als die von Durchmesser $a'\ f$.

Da dieses Ergebniß durchaus unabhängig von der Gestalt der Erzeugungsmeridiane $c\ v\ l\ e$, $f\ g\ h$ ist, so folgt daraus, daß, von welcher besondern Art auch zwey Umdrehungsflächen seyn mögen, deren Axen sich begegnen, die Projektion ihres gemeinsamen Durchschnittes auf der Ebene der Axen keine vollendete Linie seyn könne. Uebriges aber kann diese Projektion Theil einer Linie von geschlossenen Zweigen seyn, oder einer Linie von unendlichen Zweigen, wie in unserm vorliegenden Falle.

324. Die Tangente an irgend einem Punkte (R, r) des Durchschnittes ergiebt sich wie in den vorhergehenden Beyspielen aus dem Durchschnitte der tangirenden Ebenen, die durch jenen Punkt zu beyden Flächen geführt sind. Wenn man daher die Risse dieser Ebenen auf der Horizontalebene konstruirt, und ihren Begegnungspunkt mit dem Punkte (R, r) durch eine Gerade verbindet, so ist diese Gerade die verlangte Tangente.

Die tangirende Ebene zu dem Hyperboloid, dessen Axe vertikal ist, konstruirt sich wie in Art. 89. angegeben worden. Der Parallelkreis, dessen Ebene $k\ o$ durch den Punkt (R, r) geht, schneidet den Meridian $c\ l\ e, e\ m\ c$ in einem Punkte k, durch welchen man die Tangente $c\ \alpha$ zu diesem Meridan zieht. Die Entfernung $a\ \alpha$ des Punkts α, wo jene Tangente die Projektionsaxe schneidet, von der Axe (A, $a\ a'$) trägt man von A aus auf der Geraden A R nach β. Die Senkrechte $\delta\ \beta$ auf A R ist der Horizontalriß der tangirenden Ebene zu dem Hyperboloid am Punkte (R, r).

Suchen wir nun den Horizontalriß der tangirenden Ebene zu dem Paraboloid in (R, r). Der Parallelkreis dieser Fläche von dem Durchmesser $n\ p$, dessen Ebene senkrecht auf die Axe (A B, $a'\ b$) ist, schneidet den Meridian $h\ n\ f\ d$ in einem Punkte n; man ziehe durch n die Tangente $n\ \vartheta$ zu diesem Meridian. Es ist klar, daß wenn man den Punkt konstruirt, wo diese Tangente die Axe (A B, $a'\ b$) trifft, und diesen Punkt mit (R, r) durch die Gerade (R λ, $r\ \lambda'$) verbindet, diese letztere Gerade, die Tangente zu dem Meridian des Paraboloids sey, welcher durch den Punkt (R, r) geht.

Durch den Punkt n ziehe man die Senkrechte $n\ \varepsilon'$ auf die Tangente $n\ \vartheta$; so ist der Punkt (ε, ε'), in welchem diese Senkrechte die Axe (A B, $a'\ b$) trifft, derjenige, nach welchem alle Normalen zu dem Paraboloid längs den Punkten des Kreises $n\ p$ zusammenlaufen. (Art. 91.)

Wenn man daher durch (ε, ε') und durch (R, r) die Gerade (ε R, $\varepsilon'\ r$) zieht, so ist diese die Normale zu dem Paraboloid ein Punkt (R, r). Nun aber geht die tangirende Ebene an demselben Punkt dieser Fläche durch die Tangente (R λ, $r\ \lambda'$) und ist senkrecht auf die Normale (ε R, $\varepsilon'\ r$); wenn man daher den Punkt konstruirt, wo die Gerade (R λ, $r\ \lambda'$) die Horizontalebene trifft, und durch diesen Punkt auf die ε R die Senkrechte $\omega\ \delta$ errichtet, so ist diese Senkrechte $\omega\ \delta$ der Horizontalriß der gesuchten tangirenden Ebene zu dem Paraboloid. Sind die Risse $\delta\ \beta$ und $\delta\ \omega$ bekannt, so konstruire man die Projektion δ' ihres Begegnungspunktes δ, und die Gerade (δ R, $\delta'\ r$), die durch diesen letzten Punkt und durch (R, r) geführt wurde, ist die verlangte Tangente.

325. Die Konstruktion der Tangente mittelst der Normalebene zu der Durchschnittslinie läßt in dem vorliegenden Falle ein weit einfacheres Verfahren zu. Denn wenn man durch

den Punkt (R, r) zu beyden Umdrehungsflächen wechselsweise die Normalen zieht und durch diese Normalen eine Ebene führt, so ist diese normal zu dem Durchschnitte und die durch (R, r) auf diese Ebene geführte Senkrechte offenbar die verlangte Tangente. *)

Die Normale (R A, $r\,\gamma$) zu dem Hyperboloid schneidet die Axe (A, $a\,a'$) in dem Punkte (A, γ), welcher leicht zu bestimmen ist; die Normale (R ε, $r\,\varepsilon'$) zu dem Paraboloid trifft die Axe (A B, $a'\,b$) in dem schon gefundenen Punkt (ε, ε'); woraus folgt, daß die, durch diese beyden Normalen geführte Ebene, die Ebene der beyden Axen, welche zufolge der Annahme parallel mit der vertikalen Projektionsebene ist, nach der Geraden $\varepsilon'\,\gamma$ schneide. Die Senkrechte $r\,\delta'$, welche durch r auf die $\varepsilon'\,\gamma$ geführt wurde, ist daher die Vertikalprojektion der zu bestimmenden Tangente.

Die beyden Normalen (R A, $r\,\gamma$) und (R ε, $r\,\varepsilon'$) treffen die Horizontalebene in den Punkten π, ϱ; daher ist die Gerade $\pi\,\varrho$ der Horizontalriß der Ebene der zwey Normalen, und die Senkrechte R δ auf diesen Riß ist die Horizontalprojektion der Tangente am Punkt (R, r).

Alle so eben gemachten Konstruktionen, in Betreff der Tangente zu der Durchschnittslinie zweyer Umdrehungsflächen, deren Axen sich begegnen, sind auch noch in dem Falle gültig, wenn die beyden Axen sich nicht begegnen.

326. Wenn man die Tangenten zu der Kurve $t\ r\ u\ v$, $y\ z\ w$, an irgend einem ihrer äußersten Punkte t, v, y, w finden wollte, welche analog mit den in Art. 315. untersuchten Punkten sind, so würde man durch das gewöhnliche Verfahren zu keinem Resultate kommen; man würde in der That finden, daß die Tangenten an den Punkten (T, t), V, v), (Y, y), (W, w) senkrecht auf die Vertikalebene sind, und daß ihre Vertikalprojektionen sich auf die Punkte t, v, y, w selbst reduzirten.

Durch das mit einigen Modifikationen angewendete Verfahren mittelst der Normalebene, lassen sich jedoch diese Tangenten bestimmen. In der That ist die Tangente an irgend einem Punkt der Kurve $t\ r\ u\ v$, $y\ z\ w$ durch die Bedingung bestimmt, daß sie senkrecht auf die Gerade, wie $\varepsilon'\ \gamma$ sey, nach welcher die entsprechende Normalebene dieses Punkts, die Ebene der beyden Axen schneidet. An den genannten Punkten t, v, ꝛc. fällt aber die zugehörige Normalebene mit der Ebene der Axen zusammen, und ihr Durchschnitt scheint daher unbestimmt zu seyn; bemerkt man jedoch, daß diese gerade Durchschnittslinie, immer durch die beyden Punkte bestimmt wird, in welchen die Normalen, wie $r\,\varepsilon'$, $r\,\gamma$, die beyderseitigen Axen schneiden, so wird man einsehen, daß die

*) Dieses sehr anwendungsreiche Verfahren ist von J. Binet angegeben. Correspondance sur l'école polytechnique, Tom. III. pag. 190.

Tangenten an den Punkten t, v, y, w der Kurve $t\ u\ v$, $y\ z\ w$ nach der Vorschrift des Art. 325. zu finden seyen. Auf eben diese Weise würde man die Tangenten finden, welche den in Art. 315. untersuchten Punkten entsprechen.

Von den Durchschnitten der windischen Flächen. — Allgemeine Methode für die Bestimmung der Tangenten zu den krummen Linien.

327. Wenn zwey windische Flächen sich durchdringen, so ist die einfachste Art, ihre gemeinschaftlichen Punkte zu bestimmen, daß man die Flächen durch Ebenen schneidet, welche durch die geraden Erzeugungslinien der Einen von ihnen geführt sind. Da jedoch diese einzige Bedingung die Stellung der durchschneidenden Ebenen nicht festsetzt, so kann man dieselben überdies noch senkrecht auf eine der Projektionsebenen annehmen, und man erhält dadurch die gesuchten Punkte durch die Begegnungen von Geraden mit ebenen Kurven.

Nach der (Art. 154.) vorgetragenen allgemeinen Konstruktionsart der tangirenden Ebenen zu den windischen Flächen, ist es immer möglich an jedem beliebigen Punkte des Durchschnittes zweyer windischen Flächen die tangirenden Ebenen zu beyden Flächen zu bestimmen, und folglich die Tangente an demselben Punkte der Durchschnittslinie.

328. Diese letzte Eigenschaft der windischen Flächen leitet unmittelbar zu einer allgemeinen Auflösung des Problems der Tangenten. In der That, nehmen wir an, es sey an irgend einem Punkte einer ebenen krummen Linie die Tangente zu bestimmen; so kann man, welches auch der Umriß der Linie seyn mag, dieselbe immer betrachten, als auf einer windischen Fläche gelegen, die als Leitlinien erstlich die gegebene Krumme hat, und sodann noch zwey auf willkührliche Art im Raume gelegene Gerade. Nach Art. 154. kann man aber die tangirende Ebene zu dieser Fläche, an dem gegebenen Punkte konstruiren; der Durchschnitt dieser tangirenden Ebene mit der Ebene der Linie ist die verlangte Tangente.

Läge die gegebene Linie nicht in einer Ebene, so kann sie als der Durchschnitt zweyer windischen Flächen genommen werden, die eine gemeinschaftliche Leitlinie haben, nemlich die gegebene Linie, und von denen jegliche als besondere Leitlinien, zwey, willkührlich im Raume genommene Gerade hat. Für jede dieser zwey windischen Flächen läßt sich, wie schon bemerkt, an dem gegebenen Punkt die tangirende Ebene konstruiren, der wechselseitige Durchschnitt der beyden tangirenden Ebenen ist die gesuchte Tangente zu der Linie von doppelter Krümmung. *)

*) Eine Anwendung dieser Methode auf einer Ellipse, von ihrem Erfinder Hachette, findet man

In der Ausübung läßt sich diese Methode noch vereinfachen, wenn man bey jeder von den zwey windischen Flächen der einen geraden Leitlinie eine leitende Ebene substituirt, wodurch die Flächen sich in zwey Konoide verwandeln, (Art. 105.) und überdies kann man sowohl die geraden Leitlinien als die Ebenen des Parallelismus auf bequeme Art, in Bezug auf die Projektionsebenen gestellt annehmen.

Drittes Kapitel.

Von der Wahl der Projektionsebenen. — Erklärung verschiedener Projektionsmethoden.

329. Durch die bisher abgehandelten Aufgaben über die Durchschnitte der Flächen, haben wir hinlängliche Gelegenheit gehabt, einsehen zu lernen, wie sehr durch eine schickliche Wahl der Projektionsebenen, die bey jedem einzelnen Falle erfoderlichen Konstruktionen vereinfacht werden können. Von den zwey, zur Bestimmung der Durchschnittslinie einer Fläche und einer Ebene erfoderlichen Projektionen reduzirt sich Eine auf eine gerade Linie, wenn die Projektionsebene senkrecht auf die durchschneidende Ebene ist.

Bey dem Durchschnitte einer Umdrehungsfläche und einer Ebene oder einer andern Fläche wählt man als Projektionsebene eine Ebene, welche senkrecht auf die Axe der Umdrehungsfläche ist; dadurch projektiren sich alle Kreise der Fläche auf dieselbe wiederum als Kreise. Wenn zwey sich durchschneidende Flächen eine gemeinschaftliche Ebene der Symetrie haben, so vereinfacht man die Konstruktionen sehr, wenn man diese Ebene der Symetrie als eine der Projektionsebenen nimmt. Bey der Konstruktion des Durchschnittes zweyer Cylinder ist es, wie wir Art. 290. bemerkt haben, vortheilhaft, diese Linie auf zwey Ebenen zu projektiren, wovon die eine parallel zu den Erzeugungslinien beyder Cylinder ist, und die Andere, senkrecht auf eine von denselben Erzeugungslinien.

---

in dessen zweytem Supplement zur Geometrie von Monge §. II. Seite 4. und auf eine beliebige Kurve in Vallee's Géom. descr. Seite 267. Die sehr komplicirten Konstruktionen, welche diese Auflösung erfodert, machen dieselbe übrigens für die Praxis nicht so wichtig, als sie es für die spekulative Geometrie ist, wodurch dieselbe eine große bisher gewesene Lücke ausgefüllt. Ueber eine zweyte, auf ähnliche Betrachtungen gegründete Auflösung des nemlichen Problems sehe man den §. 2. des Anhanges.

Die Fig. 1. Taf, XXXII. ist nach dieser Anordnung gezeichnet. Zwey gerade horizontale Cylinder durchschneiden sich im rechten Winkel, ihre Axen begegnen sich, und die Projektion ihrer Durchschnittslinie besteht in zwey Zweigen einer Hyperbel.

Taf. XXXII. Fig. 1.

330. Es seyen E G F, I G K die horizontalen Axen zweyer sich durchschneidenden geraden Cylinder; die Ebene dieser Axen, welche wir als horizontale Projektionsebene annehmen, schneidet den Ersten der beyden Cylinder nach den Parallelen A B, C D, und den Zweyten nach den Parallelen A C, B D, welche mit den Ersten das rechtwinklige Parallelogramm A B C D bilden. Die vertikale Projektionsebene L M ist senkrecht auf die Erzeugungslinie A C oder B D des kleineren Cylinders, und schneidet denselben nach dem Kreise $e\ f\ g$, der Vertikalprojektion aller Linien dieser Fläche. Eine andere Vertikalebene B D schneidet den größeren Cylinder nach einem Kreise vom Durchmesser B D, welchen Kreis man auf die Vertikalebene L M versetze, indem man aus dem Punkt H′ mit einem Halbmesser $H' f =$ D F den Kreis $f\ n\ \omega$ beschreibt. Wir werden sogleich den Grund dieser Versetzung zeigen.

Eine beliebig genommene Horizontalebene $\pi\ p$ schneidet beyde Cylinder nach horizontalen Geraden, welche sich in Punkten ihrer Durchschnittslinie begegnen. Die Geraden des kleineren Cylinders projektiren sich auf die Horizontalebene nach den Parallelen $\varphi\ \varphi'$, N N′; die Projektionen der Geraden des größeren Cylinders schneiden diese Parallelen in vier Punkten P, P′, π', π'' der Horizontalprojektion des Durchschnittes der Cylinder. Die Konstruktion dieser Punkte ergiebt sich weit einfacher und mittelst weniger langen Linien, durch die Anwendung des nach $f\ n\ \omega$ versetzten Kreises. Nachdem man die Vertikale $f\ f'$ errichtet, verlängere man die Horizontale $\pi\ p$ bis zu ihrem Zusammentreffen mit der Vertikalen $f\ f'$ in p', und mit dem Kreise vom Halbmesser $H'\ f$ in n. Das Stück $p'\ n$ der Horizontalen trage man nach N P, N′ P′, $\varphi\ \pi''$, $\varphi'\ \pi'$, wodurch die vier Punkte P, P′, π', π'' bestimmt werden. Man wird den Grund dieser Konstruktion einsehen, wenn man die Gerade P N als die Projektion eines gemischtlinigten Dreyecks gleich $f\ p'\ n$ betrachtet, und als Horizontalriß einer Vertikalebene, welche den kleinen Cylinder nach einer Geraden schneidet, die an Länge gleich ist, der Seite $p'\ n$ des Dreyeckes, und den größeren Cylinder nach einem Bogen gleich dem Bogen $f\ n$, welcher die andere Seite des nemlichen Dreyecks bildet.

331. Die Tangente an irgend einem Punkte (P, p) des Durchschnittes der zwey Cylinder, würde man wie in Art. 303. bestimmen. Aber bey den Punkten A, B, C, D des Durchschnittes gelangte man mittelst jener Methode zu keinem Endzweck; weil die

tangirenden Ebenen an einem dieser Punkte, C zum Beyspiel vertikal sind, und sich folglich nach einer Vertikalen schneiden, die als Horizontalprojektion den Punkt C hat. Man kommt aber bey diesen Punkten mittelst der Ebene der zwey Normalen (Art. 325) zu einem Resultate. Die Normalen in C zu dem größeren und kleineren Cylinder schneiden ihre respektiven Axen in E und O; zieht man die Gerade O E, den Horizontalriß der Normalebene, so ist die Senkrechte C M′ auf diesen Riß die Tangente am Punkt C. Die Linien C K D, A I B sind die zwey Zweige einer Hyperbel, *) welche als reelle Axe die Gerade K I hat. Sie entsprechen dem Zweige des Eintritts in den größeren Cylinder und dem Zweige des Ausganges. Der ganze Durchschnitt projektirt sich auf die Vertikalebene nach dem Kreise $e\,f'\,g$.

Durchschnitt eines Cylinders und einer Kugel.

332. Die Fig. 2. Taf. XXXII. stellt den Durchschnitt eines Cylinders und einer Kugel vor. Die horizontale Projektionsebene geht durch den Mittelpunkt der Kugel und durch die Axe des geraden kreisförmigen Cylinders; die Vertikalebene ist senkrecht auf diese Axe. Die Vertikalprojektion der Durchschnittskurve ist ein Kreis, und ihre Horizontalprojektion eine Parabel.

Die horizontale Projektionsebene enthält den Mittelpunkt O der Kugel, den größten Kreis dieser Kugel vom Halbmesser O D, die Axe G G′, und zwey Kanten A C, B D des geraden Cylinders, der als Basis den Kreis $e\,f\,g$ hat. Die Vertikalebene O D schneidet die Kugel nach einem größten Kreise, den man auf die Ebene des Kreises $e\,f\,g$ versetze, aus einem ähnlichen Motive mit dem im vorhergehenden Beyspiele dargelegten. Man trage den Halbmesser O D von f nach H, und aus H′, als Mittelpunkt, beschreibe man den auf die Vertikalebene L M nach $f\,n\,k$ versetzten großen Kreis der Kugel. Eine beliebige Horizontalebene $p\,\pi$ schneidet den Cylinder nach Geraden, die sich auf die Horizontalebene nach N N′ und $\varphi\,\varphi'$ projektiren; die Horizontale $p\,\pi$ schneidet die Vertikale $f\,f'$ in dem Punkt p', und den Kreis $f\,n\,k$ im Punkt n.

---

*) Man beweißt diesen Satz durch die Analysis, indem man als Coordinatenaxen die rechtwinkligen Geraden E F, I K nimmt, welche sich im Punkt G, dem Ursprunge der Coordinaten kreuzen. Die Gleichung des kleineren Cylinders ist: $x^2 + z^2 = r^2$; die des Größeren: $y^2 + z^2 = R^2$. Eliminirt man z^2, so erhält man als Gleichung der Projektion auf die Ebene der $x\,y$:

$$y^2 - x^2 = R^2 - r^2$$

welches die Gleichung für die gleichseitige Hyperbel ist.

Trägt man die Entfernung $p' n$ des Punkts n von der Vertikalen $f f'$ auf dem Halbmesser O D von D nach δ, und beschreibt aus O, als Mittelpunkt und mit dem Halbmesser O δ einem Umkreis, welcher die Geraden N N', $\varphi \varphi'$ in den Punkten P, P', π'', π' schneidet, so gehören diese vier Punkte der Horizontalprojektion des Durchschnittes der Kugel und des Cylinders. Diese Projektion besteht aus zwey Zweigen, die einer nemlichen Parabel *) angehören, deren Scheitel in S auf der Senkrechten O G liegt, welche aus dem Mittelpunkt G der Kugel auf die Axe G G' des Cylinders gefällt ist.

Die Tangente C M' in C ergiebt sich wie in der vorstehenden Aufgabe, aus der Bedingung senkrecht auf dem Horizontalriß der Ebene der zwey Geraden C L', C O zu seyn, von denen die Eine Normale zu dem Cylinder ist, und die Andere, Normale zu der Kugel; sie trifft die Gerade O G in dem Punkt M', so daß die Subtangente C' M' ist. Theilt man C' M' durch den Punkt S in zwey gleiche Theile, so ist dieser Punkt der Scheitel der Parabel.

Durchschnitt eines Kegels und eines Cylinders.

Taf. XXXII. Fig. 4.

333. Ein Kegel, dessen Basis auf der horizontalen Projektionsebene der Kreis C K E J und dessen Scheitel in D und d projektirt ist, wird von einem geraden kreisförmigen Cylinder durchschnitten, der als Axe die Horizontale (S S, s s) hat, und als Basis, den in $m\, m'$ projektirten vertikalen Kreis, dergestalt, daß er mit seiner untersten Kante auf der Horizontalebene ruht. Man konstruirt die Durchdringungslinie dieser zwey Flächen, indem man sie beyde durch Ebenen schneidet, die durch den Scheitel der Kegelfläche parallel zu den Kanten des Cylinders geführt sind. (Art. 321.) Diese Ebe-

---

*) Man beweißt diesen Satz durch die Analysis, indem man den Mittelpunkt O der Kugel zum Ursprunge der Coordinaten nimmt, die Senkrechte O S auf die Axe G L' des Cylinders als die Axe der x, und die Parallele zu jener Axe, als Axe der y. Die Gleichung der Kugel ist: $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$. Nennt man a die Entfernung O G, so ist die Gleichung des Cylinders $(x - a)^2 + z^2 = r^2$; R und r sind die Halbmesser der Kugel und der Basis des Cylinders. Eliminirt man z^2, so erhält man als Gleichung der Projektion des Durchschnittes der Kugel und des Cylinders auf der Ebene der $x\, y$:

$$y^2 + 2\, a\, x - a^2 = R^2 - r^2.$$

Diese Gleichung gehört einer Parabel, deren Scheitel S in einer Entfernung O S vom Mittelpunkt O liegt, gleich $\frac{R^2 + a^2 - r^2}{2\, a}$.

nen haben ihre Horizontalrisse, wie leicht zu ersehen, parallel zu der Horizontalprojektion S S der Axe des Cylinders. Da aber die Risse der beyden vorgelegten Flächen nicht auf einer nemlichen Ebene gegeben sind, so ist, um die Schnitte der Hülfsebenen und der Cylinderfläche zu finden, eine dritte Projektionsebene erfoderlich, und man erhält die einfachsten Konstruktionen, wenn man hiezu eine Ebene, wie C D wählt, welche senkrecht auf die Erzeugungslinien der Cylinderfläche, und deßhalb auch senkrecht auf die Reihe der angenommenen Hülfsebenen ist, und dabey auf die Horizontalebene niedergelegt gedacht wird. Diese Projektionsebene C D enthält zwey Erzeugungslinien d' C, d' E des Kegels und einen kreisförmigen Schnitt n' p' g' des Cylinders.

Eine schneidende Hülfsebene, deren Riß J K, die Projektionsaxe C D in j trifft, in welche demnach die Kegelfläche nach zwey, horizontal in J D, K D projektirten Erzeugungslinien schneidet, hat als Riß auf der Ebene C D die Gerade j d, (D d' ist hier gleich D d), und sie schneidet die Cylinderfläche nach zwey horizontalen Erzeugungslinien (n', U W), (p', Y Z). Die Begegnungspunkte der zwey genannten Paare von Erzeugungslinien geben die Horizontalprojektionen N, N′, P, P′ von vier Punkten des Durchschnittes der zwey vorgelegten Flächen, deren Projektionen auf der Vertikalebene L M nach einer oder der andern bereits bekannten Art gefunden werden.

Die gefundene Durchschnittslinie hat auf ihrer einen Seite einen doppelten Punkt, (G, g', g) welches schon daraus zu entnehmen war, daß die äußerste Hülfsebene (F C, C d) auf dieser Seite zu gleicher Zeit berührend zu der Kegel- und der Cylinderfläche war.

Von der schiefen und perspektivischen Projektion.

334. Die Projektionsmethode, welche wir (Art. 7 — 10.) erklärt, und der wir uns bis jetzt ausschließlich bedient haben, um die Stellung der verschiedenen Punkte des Raumes zu bestimmen, besteht wie bekannt darinn, aus jedem zu bestimmenden Punkte eine Senkrechte auf jede der zwey Projektionsebene zu fällen; die Fußpunkte dieser Senkrechten, welche die Projektionen des betrachteten Punktes sind, bestimmen die Stellung dieses letzteren im Raume.

Wenn man durch irgend einen Punkt des Raumes zwey gerade Linien unter bekannten aber schiefen Richtungen nach beyden Projektionsebenen führte, so wäre, wenn man diese Geraden als projektirende Linien betrachtet, und ihre Durchschnitte mit den Projektionsebenen, als die Projektionen des Punktes, die Stellung dieses letzteren durch

die Angabe dieser Projektionen, und der Richtung der projektirenden Geraden ebenfalls vollkommen bestimmt. Man nennt **schiefe Projektion** diejenige Methode, bey welcher die projektirenden Geraden parallel unter sich sind, aber eine bestimmte schiefe Richtung, in Bezug auf die Projektionsebene haben. Die erstgenannte Projektionsart hingegen nennt man, zur Unterscheidung von dieser, **rechtwinklige** oder **orthogonale Projektion**. Bey diesen beyden Projektionen sind die projektirenden Flächen der geraden Linien, Ebenen, und die der Kurven, Cylinder.

Die allgemeinste Projektionsart ist diejenige, wenn die projektirenden Linien sämmtlich nach einem bestimmten und bekannten Punkte des Raumes zusammen laufen; man nennt sie **zentrale** oder **perspektivische Projektion**.

Durch zwey zentrale oder perspektivische Projektionen eines Punktes auf zwey verschiedenen Ebenen, deren jede ihren besonderen Projektionsmittelpunkt hat, ist die Stellung dieses Punkts im Raume ebenfalls bestimmt. Die projektirenden Flächen der Kurven sind bey der perspektivischen Projektion Kegel, die projektirenden Flächen der Geraden dagegen Ebenen, wie bey den beyden andern Projektionen.

335. Im ersten Buche haben wir die, auf die rechtwinklige Projektion bezüglichen Lehrsätze erklärt; der folgende Satz gilt für alle drey Projektionsarten, und zwar im ganz allgemeinen Sinne, das heißt, wenn man statt der Projektionsebenen beliebige krumme Flächen nähme.

„Wenn zwey Linien sich im Raume schneiden, so ist die Projektion ihres Begegnungspunktes auf einer Ebene oder einer krummen Fläche zugleich auch der Begegnungspunkt der Projektionen derselben Linien auf dieser Ebene oder Fläche.“

Der Satz gilt auch bey zwey Linien, welche sich berühren; „die Projektion ihres Berührungspunktes ist auch der Berührungspunkt der Projektionen der Linien.“

Der Satz: „parallele Gerade haben als Projektionen auf einer Ebene wiederum parallele Gerade“ ist bey der rechtwinkligen und schiefen Projektion giltig, wobey die projektirenden Geraden parallel unter sich sind, er kann aber nicht allgemein bey der perspektivischen Projektion statt haben.

Die zwey für die Ausübung so fruchtbaren Sätze:
„auf einer Projektionszeichnung liegen die beyden Projektionen eines Punktes in „einer auf die Projektionsaxe senkrechten Geraden;“ und:
„wenn eine Gerade und eine Ebene senkrecht unter sich sind, so ist die Projektion „der Geraden senkrecht auf den entsprechenden Riß der Ebene,“ (Art. 16. 38.)
finden blos bey der rechtwinkligen Projektion ihre Anwendung.

Bey der rechtwinkligen, der schiefen und der perspektivischen Projektion haben alle auf einer nemlichen projektirenden Fläche gelegenen Punkte und Linien als gemeinsame Projektion auf einer Ebene oder irgend einer andern Fläche, den Durchschnitt der projektirenden Fläche durch diese letztere.

Auf diesen Satz gründen sich viele Anwendungen der schiefen und zentralen Projektion. Durch die Verbindung dieser Projektionsarten mit den rechtwinkligen lassen sich in manchen Fällen sehr einfache und elegante Auflösungen geben, wovon wir hier einige Beyspiele anführen wollen.

Durchschnitt eines geraden und eines schiefen kreisförmigen Cylinders.

336. Wenn ein Cylinder und eine andere bestimmte Fläche sich durchdringen, so findet man ihre Durchschnittslinie, wenn man beyde Flächen durch eine Reihe paralleler Ebenen schneidet. Die Punkte, in denen die in einer Ebene enthaltenen Schnitte sich begegnen, gehören der Linie an, nach welcher die zwey Flächen sich durchdringen. Projektirt man die Schnitte auf eine Ebene, mittelst paralleler Geraden zu den Erzeugungslinien des Cylinders, so ist die Projektion der Schnitte des Cylinders unveränderlich und die Projektion der Schnitte der Fläche, welche den Cylinder durchdringt, ändert sich bey jeder durchschneidenden Ebene; aber die Parallelen zu den Kanten des Cylinders, die durch die Punkte geführt sind, in welchen jene Projektionen sich schneiden, enthalten die Punkte der Durchschnittslinie der zwey Flächen, und da diese Punkte auch in der durchschneidenden Ebene liegen müssen, so sind sie bestimmt. Nehmen wir an, ein Cylinder, dessen Erzeugungslinie horizontal ist, werde von einem andern geneigten Cylinder geschnitten; man verlangt ihre Durchschnittslinie und den Schnitt des zweyten Cylinders durch eine Ebene, welche senkrecht auf seine Erzeugungslinie ist.

Taf. XXXII. Fig. 3.

337. Es sey C D die horizontale Axe eines Cylinders von kreisförmiger Basis, A B der Horizontalriß einer Vertikalebene, welche diesen Cylinder nach einem Kreise vom Halbmesser A C oder B C schneidet. Dieser horizontale Cylinder wird von einem schiefen Cylinder durchschnitten, dessen kreisförmige Grundlinie f' g h' in einer Vertikalebene f h liegt; der Durchmesser f' h' dieser Basis ist von der horizontalen Projektionsebene um die vertikale Höhe f f' oder h h' entfernt. Die horizontalen und rechtwinkligen Projektionen der Kanten des schiefen Cylinders, welche durch die Punkte f', h' gehen, sind die Geraden f F, h H. Diese Kanten sind in einer Ebene,

welche die horizontale Projektionsebene nach der Geraden F H schneidet. Eine Vertikalebene f F F′ drehe sich um ihren Horizontalriß f F′, um sich auf die Horizontalebene zurückzulegen. Auf diese erste Ebene tragen wir die Punkte des Raumes mittelst schiefer Linien über. Wir nehmen als projektirende Linien horizontale Parallelen zu der Erzeugungslinie des großen horizontalen Cylinders; alle Linien dieses größeren Cylinders projektiren sich nach der Krummen F L F′, die aus seinem Durchschnitt mit der vertikalen Projektionsebene f F F′ entsteht. Die Basis f' g h' des kleineren Cylinders projektirt sich auf die Ebene f F F′ nach der auf f F′ senkrechten Geraden f g': dergestalt, daß der horizontale Durchmesser f' h' als schiefe Projektion den Punkt f'' der Geraden $f\,g'$ hat, welchen man bestimmt, indem man $f\,f'' = f\,f'$ macht.

Die Hypothenuse F f'' des rechtwinkligen Dreyecks F f f'' ist die schiefe Projektion des Parallelogramms, dessen gegenüberstehenden Seiten die Horizontalen F H, f' h' sind. Trägt man e' g nach f'' g' und zieht zu f'' F die Parallele g' k, so ist das Stück F k der Krummen F L F′ die schiefe Projektion des Durchschnittes des halben Cylinders von der Grundlinie f' g h'. Dieser Durchschnitt hat überdies als orthogonale Horizontalprojektion die Krumme F K H, welche wir konstruiren wollen.

Die Punkte F und H dieser Krummen sind auf der Horizontalen A A′ durch das Zusammentreffen derselben mit den Geraden f F, h H bestimmt. Um einen zwischenliegenden Punkt M auf der zu F f' parallelen Geraden M N zu finden, betrachte man diese Gerade M N als Horizontalriß einer Vertikalebene, welche die Ebene des Kreises f' g h' nach der Geraden N m schneidet. Trägt man die Vertikale N m auf der f g' von f nach m', und zieht die Parallele m' m'' zu F f'', welche die Krumme F k in m'' trifft; errichtet sodann aus diesem Punkt m'' die Vertikale m'' μ, und zieht durch den Punkt μ der Geraden f F die Parallele μ M zu F H, so schneidet diese Parallele die Gerade M N in dem Punkt M. Eine andere durchschneidende Ebene M′ N′, die parallel zur Vertikalebene M N wäre, gäbe einen andern Punkt M′ der Krummen F M M′ H.

338. Die schiefe Projektion des **geraden Schnittes** des kleineren Cylinders von der Grundlinie f' g h', ist auf der Projektionsebene f' F F′ eine Kurve p q r', welche zu konstruiren ist. Die Ebene dieses geraden Schnittes hat als Riß auf der horizontalen Projektionsebene die senkrechte Gerade P Q auf die Parallelen f F, h H. Eine beliebig genommene Vertikalebene M′ N′ schneidet den Cylinder und die Ebene des geraden Schnittes nach zwey, im Raume unter sich senkrechten Geraden, deren schiefe Projektionen auf der Vertikalebene f F′ sich ebenfalls im rechten Winkel durchschneiden. Nun aber ist die schiefe Projektion der Geraden des Cylinders auf der Vertikalebene f F′ die

Gerade $m' \; m''$; die schiefe Projektion des Punkts R ist R'; wenn man daher aus dem Punkt R' auf $m' \; m''$ die Senkrechte R' r' errichtet, so gehört der Fußpunkt r' dieser Senkrechten der schiefen Projektion $q \, r' \, p$ des geraden Schnittes an.

Die schiefe Projektion des Punktes Q ist Q'; die schiefen Projektionen der zwey, in den Vertikalebenen f F, h H enthaltenen Kanten des Cylinders, fallen in die eine Gerade f'' F zusammen; es folgt daraus, daß die, aus den Punkten Q' und P auf die F f'' gefällten Senkrechten Q' q, P p die Punkte q, p der Krummen $q \, r' \, p$ bestimmen.

Mittelst des geraden Schnittes des kleineren Cylinders, wird man die Aufwicklung dieses Cylinders erhalten, und darauf alle Linien übertragen können, welche durch die beyden Projektionen, der schiefen vertikalen, und der rechtwinkligen horizontalen bestimmt sind.

Perspektivische Projektion.

Von den Projektionen des Kreises.

339. Die rechtwinklige oder schiefe Projektion eines Kreises auf einer Ebene, ist immer eine Ellipse, wenn anders die Projektionsebene nicht parallel zu der Ebene des Kreises ist. (Siehe §. 2. des Anhanges.)

Bey der perspektivischen oder zentralen Projektion eines Kreises bildet die projektirende Fläche desselben einen kreisförmigen Kegel, dessen Scheitel der Projektionsmittelpunkt ist (Art. 333.); dieser kann aber durch eine Ebene, welche nicht parallel zu seiner Basis ist, bekanntlich nur nach einer von den drey Kurven, der Ellipse, der Hyperbel oder der Parabel geschnitten werden. Man sieht hieraus, daß die perspektivische Projektion eines Kreises auf einer Ebene immer eine der drey genannten Linien seyn müsse. Da aber von zwey ebenen Linien, deren Eine die Projektion der Anderen ist, dieser Letzte auch umgekehrt als die Projektion der ersten zu betrachten ist; so kann auch jeder Kreis als die zentrale Projektion irgend eine Kegelschnittslinie angesehen werden. *)

Es folgt aus diesen Erkärungen unmittelbar, daß jeder Kegel der zweyten Ordnung, das heißt, jeder Kegel, welcher eine Kurve der zweyten Ordnung zur Basis hat, auch ein kreisförmiger Kegel sey.

---

*) Anfänger können sich an der Aufgabe üben, bey einer gegebenen Ellipse, als Basis eines schiefen Cylinders, die Stellung der Ebene zu finden, welche diesen Cylinder nach einem Kreise schneidet; und eben so, bey einer gegebenen Kegelschnittslinie und bestimmtem Projektionsmittelpunkte, die Ebene zu finden, worauf sich jene Kurve als Kreis projektirt.

Durchschnitt eines Kegels und einer Umdrehungsfläche.

340. Um die gemeinschaftliche Durchschnittslinie eines Kegels und einer Umdrehungsfläche zu konstruiren, nehme man beyde Flächen durch eine Reihe von Ebenen geschnitten an, die sämmtlich auf die Axe der Umdrehungsfläche senkrecht sind. Man betrachte den Schnitt des Kegels durch eine von den Ebenen dieser Reihe als seine Basis, und man projektire auf diese Ebene die kreisförmigen Schnitte der Umdrehungsfläche, mittelst projektirender Linien, die nach dem Scheitel des Kegels zusammenlaufen. Die Projektionen dieser Kreise sind wiederum Kreise, unter denen man diejenigen bemerkt, welche die Basis des Kegels schneiden. Durch den Punkt, wo einer der letztgenannten Kreise die Grundlinie des Kegels schneidet, führe man eine Kante des Kegels; diese Kante wird den kreisförmigen Schnitt der Umdrehungsfläche, von welchem jener Kreis die perspektivische Projektion ist, in einem Punkt treffen, welcher dem Durchschnitt der Umdrehungsfläche und des Kegels angehört. *)

341. Taf. XXXIII. Auf der Horizontalebene, welche senkrecht auf die Axe der Umdrehungsfläche angenommen ist, sey B C D E die Grundlinie des Kegels; L M sey der Durchschnitt der beyden Projektionsebenen und (A, a) sey der Mittelpunkt des Kegels. Eine, durch die Umdrehungsaxe (F, $f\ f'$) parallel zur Vertikalebene L M geführte Meridianebene, schneidet die Umdrehungsfläche nach ihrem Erzeugungsmeridian (G H, $h\ k\ i\ g$).

Irgend eine Horizontalebene $i\ k$ schneidet die Umdrehungsfläche nach einem ihrer Parallelkreise (I K L′, $i\ k$), dessen Mittelpunkt in (F, n) ist. Man projektire diesen Parallelkreis auf die Ebene der Grundlinie des Kegels, welche als perspektivische Projektionsebene angenommen ist, mittelst projektirender Geraden, die nach dem Mittelpunkt (A, a) zusammenlaufen. Die perspektivische Projektion dieses Kreises ist ein anderer Kreis, vom Durchmesser I′ K′ = $i'\ k'$, dessen Mittelpunkt (N, n') in dem Durchschnitt der Horizontalebene und der Geraden (A F, $a\ n$) liegt, welche den Mittelpunkt (F, n) mit jenem des Kegels (A, a) verbindet. Der Kreis D I′ E K′ schneidet die Basis B C D E des Kegels in den Punkten D, E; die Geraden, welche durch diese Punkte nach dem Mittelpunkte (A, a) des Kegels geführt sind, treffen den Parallelkreis

*) Diese Auflösung, so wie die des folgenden Problems (Art. 341.) findet sich zuerst angeführt in dem Traité de Géométrie descriptive von Potier. Paris 1817. liv III. Appl. XIV et XVII.

(I K L′, $i\,k$) der Umdrehungsfläche in den zwey Punkten (α, α'), (β, β'), welche dem Durchschnitt des Kegels und der Umdrehungsfläche angehören.

Verfährt man auf dieselbe Weise bey andern Parallelkreisen der Umdrehungsfläche, so findet man so viele weitere Punkte des Durchschnittes ($\alpha\ \beta\ \gamma \ldots \delta\ \varepsilon\ \zeta$, $\alpha'\ \beta'\ \gamma' \ldots \delta'\ \varepsilon'\ \zeta'$) der zwey gegebenen Flächen, als man verlangt.

342. Wenn verlangt würde, den Durchschnitt eines Cylinders und einer Umdrehungsfläche zu bestimmen, so würde man statt der zentralen Projektion die schiefe Projektion anwenden, indem man als projektirende Linien Parallelen zu den Erzeugungslinien des Cylinders nähme. Durch die gleichen Verfahrungsarten fände man die Durchschnittslinie eines Kegels oder eines Cylinders durch eine Fläche, welche als Erzeugungslinie eine ebene Kurve von beständiger oder veränderlicher Gestalt hätte, deren Ebene sich parallel zu ihr selbst bewegte. Man würde als Basis des Kegels oder Cylinders, den Schnitt desselben durch eine Ebene nehmen, welche parallel wäre zu der Ebene der beweglichen Erzeugungskurve.

Noten zum dritten Buch.

Note I.

Ueber die Durchschnitte der krummen Flächen und Ebenen.

Das erste Kapitel dieses Buches lehrt die Konstruktionsart des Durchschnittes einer krummen Fläche und einer Ebene im Allgemeinen, so wie in mehreren besonderen Fällen. Von der nemlichen Aufgabe hängt zugleich diejenige ab, den Durchschnitt einer Fläche und einer geraden Linie zu bestimmen; denn irgend eine durch die Gerade gehende Ebene schneidet die krumme Fläche nach einer gewissen krummen Linie, die Begegnungspunkte dieser Kurve mit der Geraden sind die gesuchten Punkte.

Note II.

Ueber die Aufwicklung der Flächen.

Aus den Art. 223. 230. 236. 312. angeführten Beyspielen ist zu ersehen, daß man, um die Aufwicklung irgend einer aufwickelbaren Fläche zu erhalten, auf der Fläche eine Kurve kennen müsse, deren Gestalt auch auf der Aufwicklung zum Voraus bekannt ist. Bey den Cylindern ist diese zum Beyspiel, der Schnitt senkrecht auf die Kanten, und bey den Kegeln, der Durchtchnitt mit einer konzentrischen Kugel. Kann man zu einer solchen Linie, auf der Fläche sowohl als auf ihrer Aufwicklung Tangenten ziehen, und dadurch die Winkel bestimmen, unter denen die Linie von den aufeinanderfolgenden Kanten der Fläche geschnitten wird, so lassen sich, da diese Winkel durch die Aufwicklung nicht verändert werden, mittelst derselben, auf der Aufwicklung die Geraden der Fläche bestimmen, und somit auf ähnliche Art, wie in den vier gegebenen Beyspielen, jeder durch seine Projektionen bestimmte Punkt der Fläche auf ihre Aufwicklung übertragen. Nun aber kennt man nicht bey jeder aufwickelbaren Fläche eine Linie von der so eben angegebeuen Beschaffenheit, und die Aufgabe, die Aufwicklung einer Fläche zu konstruiren, um auf dieselbe irgend eine Linie der Fläche überzutragen, ist daher nur in einzelnen Fällen durch bloße geometrische Verfahrungsarten zu lösen, wie bey allen Kegeln und allen Cylinderflächen, nicht aber im Allgemeinen.

Lacroix hat in dem ersten Bande seines großen Calcul différentiel die analytische Auflösung des Problems gegeben: Es ist auf einer aufwickelbaren Fläche irgend eine Kurve verzeichnet; man soll finden, was diese Kurve durch die Aufwicklung der Fläche wird; und umgekehrt, eine Kurve ist auf einer Ebene verzeichnet, man soll finden, was diese Kurve wird, wenn man ihre Ebene auf eine gegebene Fläche umwickelt.

Note III.

Ueber die Durchschnitte der krummen Flächen unter sich.

Das zweyte Kapitel d. B. enthält die Lösung der Aufgabe, den Durchschnitt zweyer krummen Flächen zu bestimmen; es könnte übrigens auch aufgegeben werden, den Durchschnitt einer krummen Fläche und einer außerhalb der Fläche gegebenen Kurve zu bestimmen. Um diese Aufgabe zu lösen, denkt man sich die Kurve auf eine krumme Fläche versetzt, deren Erzeugung bekannt ist; man konstruirt sodann den Durchschnitt dieser letzten Fläche mit der gegebenen; die Punkte, welche die so gefundene Durchschnittslinie mit der gegebenen Kurve gemein hat, sind offenbar die gesuchten Punkte. Die einfachste Fläche, auf die man eine, durch ihre Projektionen gegebene Kurve versetzen kann, ist eine der projektirenden Flächen dieser Kurve.

Note IV.

Durchschnitt zweyer Umdrehungs-Ellipsoide, deren Axen sich nicht begegnen; siehe Art. 322 et seq.

Wenn die Axen zweyer Umdrehungsflächen, deren gemeinschaftlicher Durchschnitt zu konstruiren wäre, sich nicht begegneten, so würde man ein System von durchschneidenden Ebenen anwenden, welche sämmtlich senkrecht auf eine der beyden Axen wären, damit man nur nöthig hätte, die Schnitte der andern Fläche punktweise zu bestimmen. Es giebt indessen einen besondern Fall, wobey die Axen der zwey Flächen sich nicht begegnen, und wo man die Punkte ihres Durchschnittes durch die Begegnung zweyer Kreise findet, welche die Projektionen der Schnitte beyder Flächen durch eine nemliche Ebene sind.

Es ist bekannt, daß die Flächen des zweyten Grads durch parallele Ebenen, nach ähnlichen und ähnlich gelegenen Linien geschnitten werden.

Zwey Umdrehungsflächen des zweyten Grads, wie zwey Ellipsoide, deren Axen sich nicht begegnen, besitzen dieselbe Eigenschaft. Auf diese Betrachtung ist folgende Auflösung gegründet, welche Herr Chapuis bekannt gemacht hat. *) Eine beliebige, zu beyden Axen parallele Ebene P werde als erste Projektionsebene angenommen, und es giebt, wie wir zuerst darthun werden, zwey andere Ebenen P′, P″, welche senkrecht auf dieselbe sind, und von denen die erste P′, die beyden Ellipsoide nach zwey Ellipsen schneidet, welche beyde als orthogonale Projektionen auf der Ebene P″, Kreise von bestimmten Durchmessern haben.

Taf. XXXIII. Fig. a. Von zwey Ellipsoiden, welche sich durchschneiden, habe das Eine als Axe die Gerade A B und als Meridianschnitt die Ellipse A H B, welche als große Axe die Gerade A B hat und die Senkrechte O H auf A B als halbe kleine Axe. Man nehme als erste Projektionsebene diejenige, welche durch die Axe A B geht, und welche parallel zu der zweyten Axe ist; es sey gegeben die Entfernung dieser zweyten Axe von der Ersten, auf einer Geraden gemessen, welche senkrecht auf beyde ist.

---

*) Correspondance sur l'école polytechnique, par Hachette tom. II. pag. 156.

Jede durch den Mittelpunkt O des ersten Ellipsoids A B, und senkrecht auf die erste Projektionsebene geführte Ebene schneidet dieses Ellipsoid nach einer Ellipse, deren große Axe ein Durchmesser der Ellipse A E B ist, und deren halbe kleine Axe gleich O H, das heißt, gleich der halben kleinen Axe des Ellipsoids ist.

Es verhält sich eben so mit jeder andern, auf die Projektionsebene senkrechten Ebene, welche durch den Mittelpunkt O′ des zweyten Ellipsoides gienge. Der Schnitt wäre eine Ellipse, welche als kleine Axe eine Gerade gleich der kleinen Axe H′ h' des Ellipsoids hätte, und als große Axe einen Durchmesser der Ellipse C D H′ h'. welche der Meridianschnitt dieses zweyten Ellipsoides ist.

Es sey O E der Riß einer beliebigen, auf die erste Projektionsebene senkrechten und durch den Mittelpunkt O des ersten Ellipsoides gehenden Ebene. Die durch diese Ebene in dem Ellipsoid gemachte Schnitt wird eine Ellipse (E) seyn, welche O E als halbe große Axe, und O H als halbe kleine Axe hat. Konstruirt man über O E als Hypothenuse mit einer Seite E G = O H das rechtwinklige Dreyeck E G O, so ist E G der Riß einer Ebene P″, die senkrecht auf die erste Projektionsebene ist, und wenn man diese als zweyte Projektionsebene annimmt, so wird die Ellipse (E) sich als ein Kreis darauf projektiren, weil die Projektion der großen Axe dieser Ellipse gleich der kleinen Axe seyn wird.

Das nemliche Raisonnement läßt sich bey dem in G′ rechtwinkligen Dreyeck E′ O′ G′ machen. Wenn die Seite E′ G′ gleich ist der kleinen Axe O′ H′, so wird Ellipse (E′), der Schnitt des zweyten Ellipsoides durch die Ebene O′ E′, sich auf die Ebene E′ G′ nach einem Kreise projektiren; wobey die projektirenden Linien parallel zu der, auf E′ G′ senkrechten Seite O′ G′ sind; aber die Ebenen der zwey Ellipsen (E), (E′) sollen parallel seyn, und um ihre Richtungen zu bestimmen, wende man folgenden Kunstgriff an.

Man denke sich ein drittes Umdrehungsellipsoid, ähnlich mit dem Zweyten, dessen kleine Axe gleich der kleinen Axe des ersten Ellipsoides ist. Dieses dritte Ellipsoid hat denselben Mittelpunkt O, wie das Erste, seine große Axe C′ D′, welche parallel ist mit der großen Axe C D des zweyten Ellipsoids, steht mit dieser Axe C D im Verhältniß der beyden keinen Axen O′ H′, O H. Man trage auf die O h, senkrecht auf C′ D′ die kleine Axe O h = O H; und um die Länge O C′ der halben großen Axe zu erhalten, setze man folgende Proportion an:

$$O'H : O h :: O'C : OC' = \frac{O h \times O' C.}{O' H'}$$

Die Ellipse C′ h D′ des dritten Ellipsoids schneidet die Ellipse, A H B, die Erzeugungslinie des Ersten, im Punkt E, durch welchen man die Gerade O E ziehe. Diese Gerade und die halbe kleine Axe O H bestimmen das Dreyeck E O G. Nun aber ist es einleuchtend, daß die Ebene E O, die senkrecht auf die, zu den beyden Axen parallele Ebene ist, das erste und dritte Ellipsoid nach Ellipsen schneide, deren Projektionen auf der Ebene E G oder E′ G′ Kreise sind; überdem sind die parallelen Schnitte eines Ellipsoids ähnlich und ähnlich gelegen; nimmt man daher die Ebene E G oder E′ G′ als Projektionsebene, so wird jedes Paar, in dem ersten und dritten Ellipsoide gemachter Schnitte sich auf die Ebene nach zwey Kreisen projektiren, die sich in zwey Punkten der Durchschnittslinie des ersten Ellipsoids und des Hülfsellipsoids schneiden. Dieses letzte

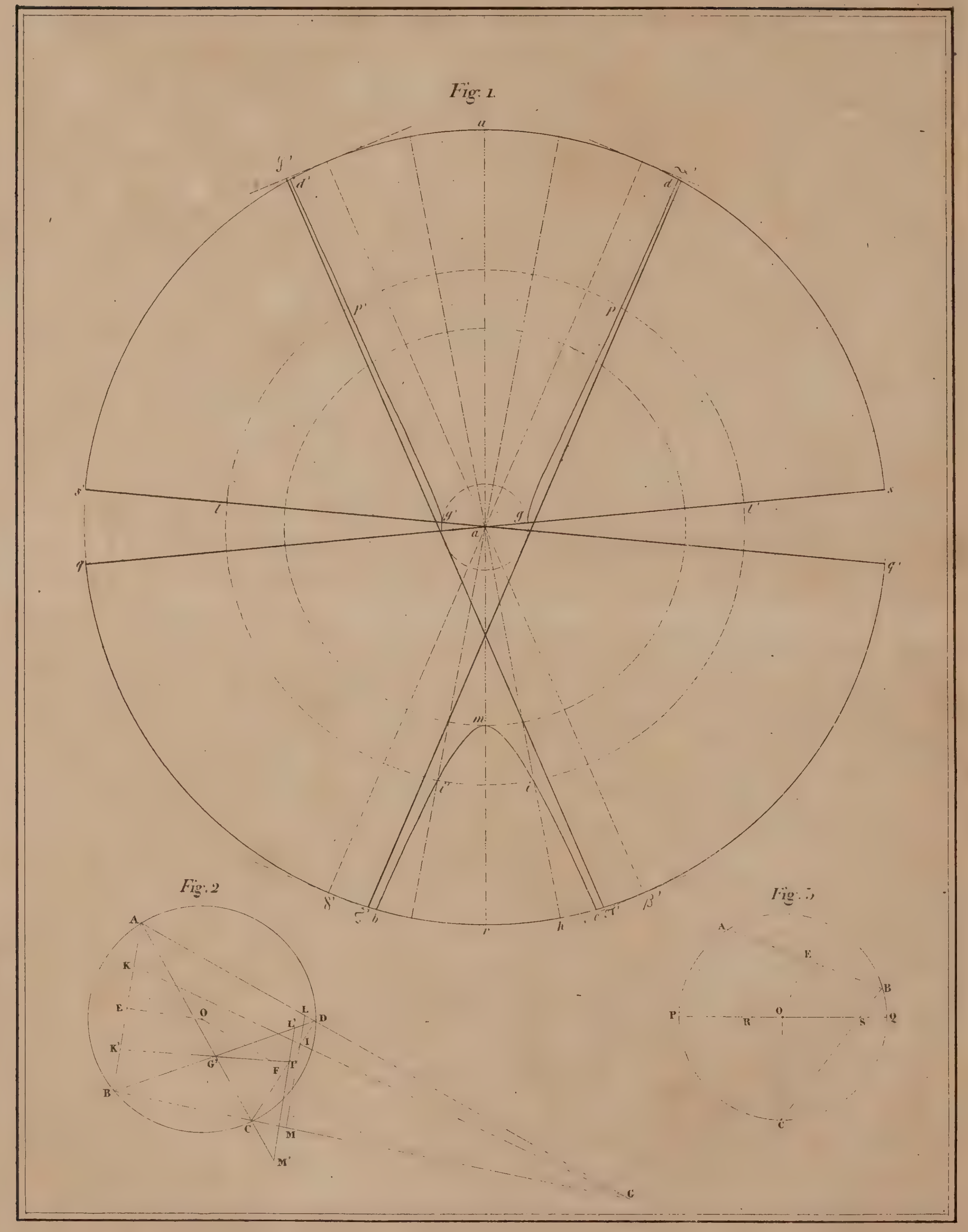
Ellipsoid ist aber nach der Hypothese, ähnlich mit dem zweyten und ähnlich gelegen, woraus folgt, daß die gegebenen Ellipsoide durch parallele Ebenen, zu derjenigen, deren Riß O E ist, nach Ellipsen geschnitten werden, deren Projektionen auf der Ebene E G, oder ihren parallelen Ebenen, Kreise sind.

Es sey A′ B′ irgend eine Senkrechte auf die Seite O G des Dreyecks E O G, welche man als Durchschnittslinie an beyden Projektionsebenen nehme. Indem man annimmt, daß die erste dieser Ebenen, welche die Ellipse A H B enthält, vertikal sey; so ist die Gerade O G eine Vertikale, und A′ B′ die Horizentalprojektion der ersten Umdrehungsaxe A B. Da die kürzesten Entfernung der beyden Axen gegeben ist, so trage man diese Entfernung zwischen die zwey Parallelen A′ B′, C″ D″ und diese Letztere ist die Horizontalprojektion der zweyten Axe. Die Schnitte der zwey Ellipsoiden durch Ebenen, die parallel zu O E, und senkrecht auf die vertikale Projektionsebene sind, projektiren sich auf die Horizontalebene als Kreise.

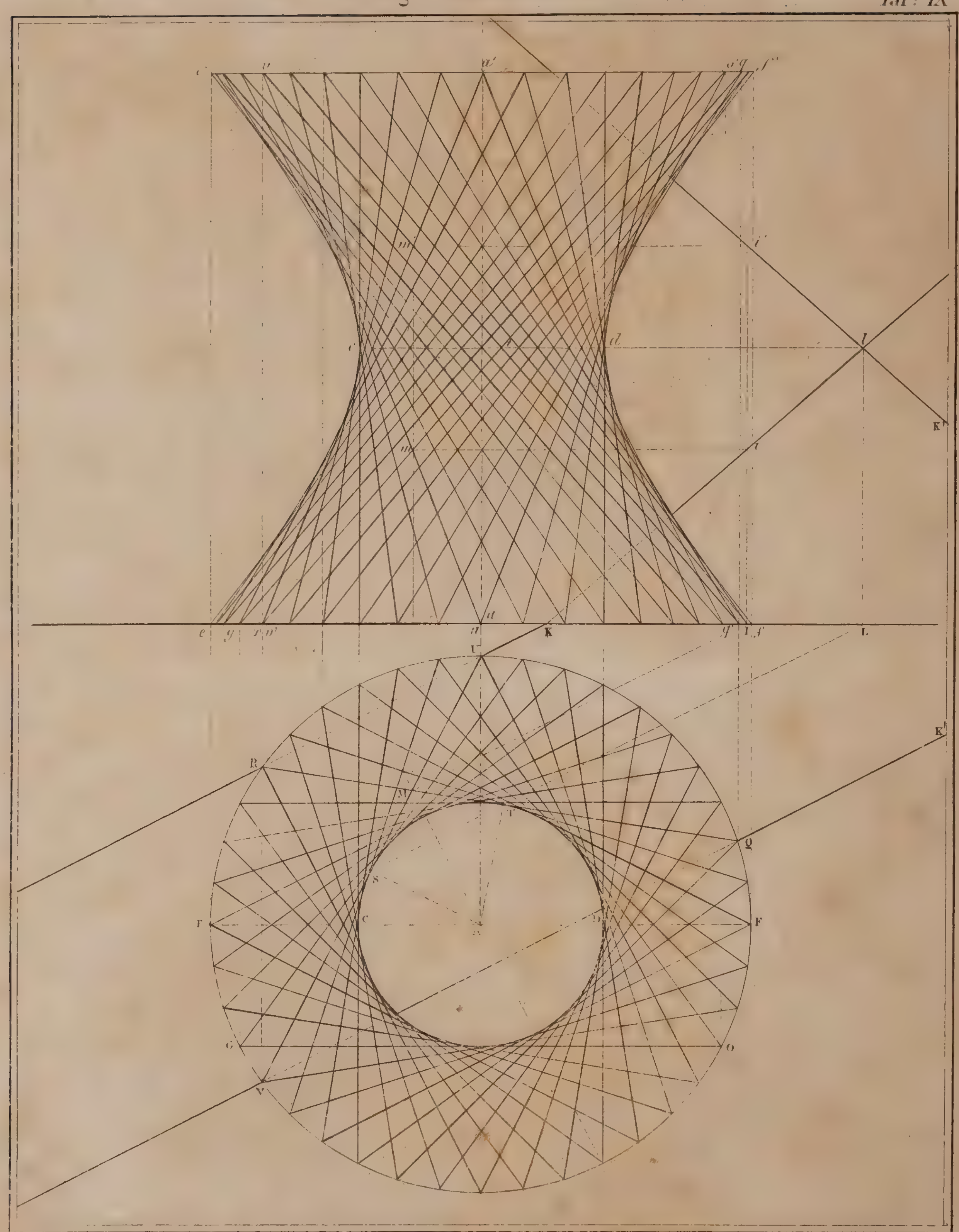
Es sey die Parallele $\alpha\ \delta$ zu O E oder O′ E′ der Vertikalriß einer Ebene, welche die beyden Ellipsoiden nach zwey Ellipsen (E), (E′) schneidet, welche als Axen, die Sehnen $\alpha\ \beta$, $\gamma\ \delta$ der zwey Erzeugungsellipsen haben. Von diesen Axen prejektirt sich die Erste auf die Gerade A′ B, nach $\alpha'\ \beta'$, und die zweyte auf die Gerade C″ D″ nach $\gamma'\ \delta'$. Die über $\alpha'\ \beta'$ und $\gamma'\ \delta'$ als Durchmesser beschriebenen Kreise sind die Horizontalprojektionen der zwey Ellipsen (E), (E′); sie schneiden sich in zwey Punkten φ, ψ, welche die Horizontalprojektionen zweyer Punkte der Durchschnittslinie beyder Ellipsoide sind; man würde ihre Vertikalprojektionen durch das Zusammentreffen der Geraden $\alpha\ \delta$ und der, ans den Punkten φ, ψ errichteten Senkrechten auf die Gerade A′ B′ erhalten.

Die zwey Erzeugungsellipsen des ersten gegebenen Ellipsoids und des ähnlichen Ellipsoids mit dem zweyten Gegebenen, schneiden sich in vier Punkten, welche auf den zwey Durchmessern E e, $\varepsilon\ \varepsilon'$ gelegen sind; die Ebenen, welche durch diese Durchmesser, und senkrecht auf die Ebene der Axen A B, C′ D′ der zwey Ellipsoiden geführt sind, enthalten zwey Ellipsen, welche die Durchschnittslinien dieser nemlichen Ellipsoide sind. Im Allgemeinen schneiden sich zwey Ellipsoide, welche einerley Mittelpunkt, und eine Hauptaxe von gleicher Länge haben, nach ebenen Kurven. Wir haben uns des Durchmessers E e bedient, um das Dreyeck E O G zu bestimmen, dessen Seite E G der Riß einer Ebene ist auf welche die Schnitte der Ellipsoide sich nach Kreisen projektiren; aber der zweyte Durchmesser ε O ε', wäre die Hypothenuse eines in t rechtwinkligen Dreyecks ε O t, dessen Seite O t eine zweyte Ebene bestimmte, dergestalt, daß alle parallelen Schnitte der Ellipsoide zu der, durch den Durchmesser $\varepsilon\ \varepsilon'$, und senkrecht auf die Ebene der zwey Axen A B, C′ D′ geführten Ebene, sich auf dieselbe ebenfalls nach Kreisen projektiren.




Fig. 1.
Fig. 2
Fig. 3



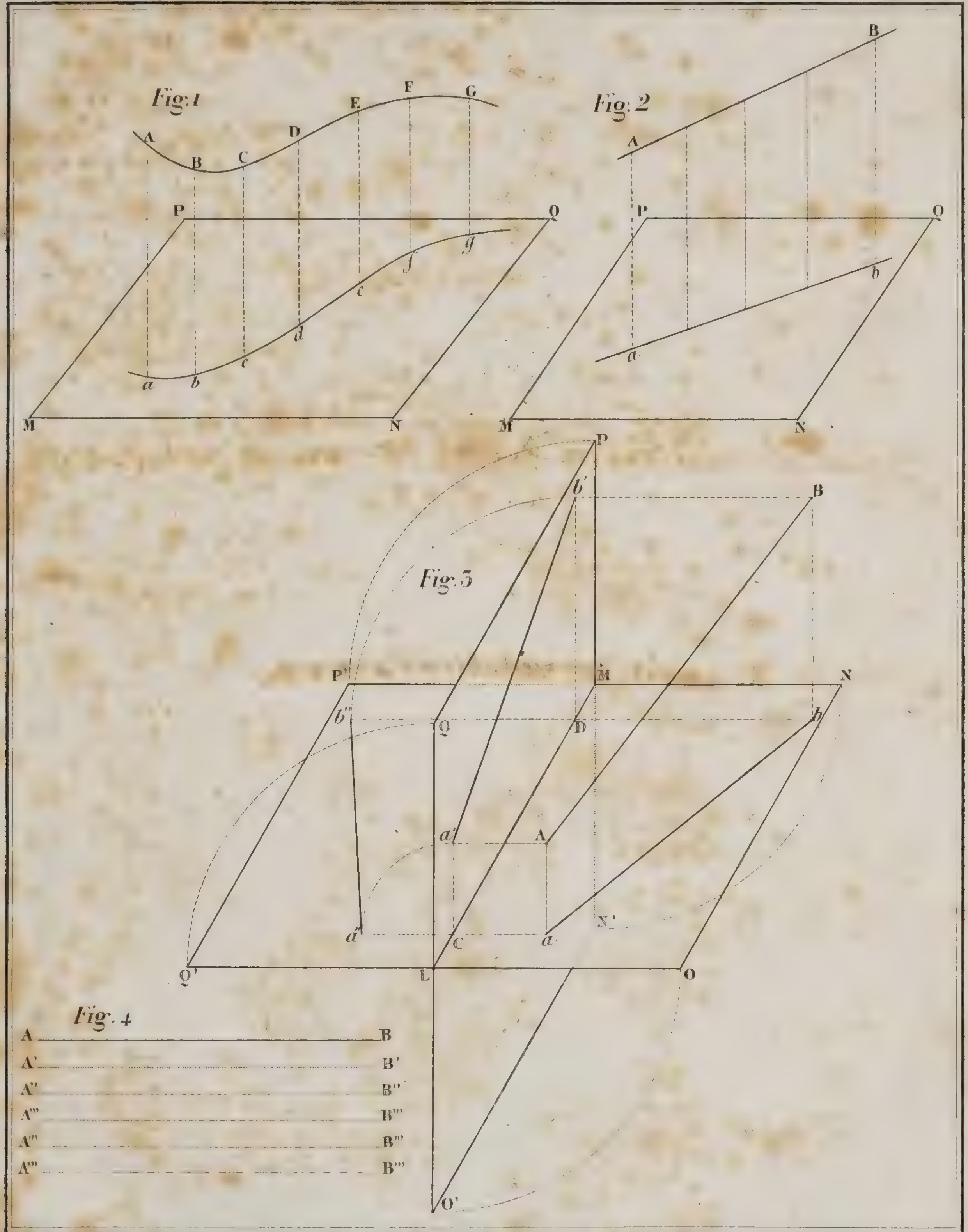


Verbesserungen,

welche nothwendig zu berichtigen sind.

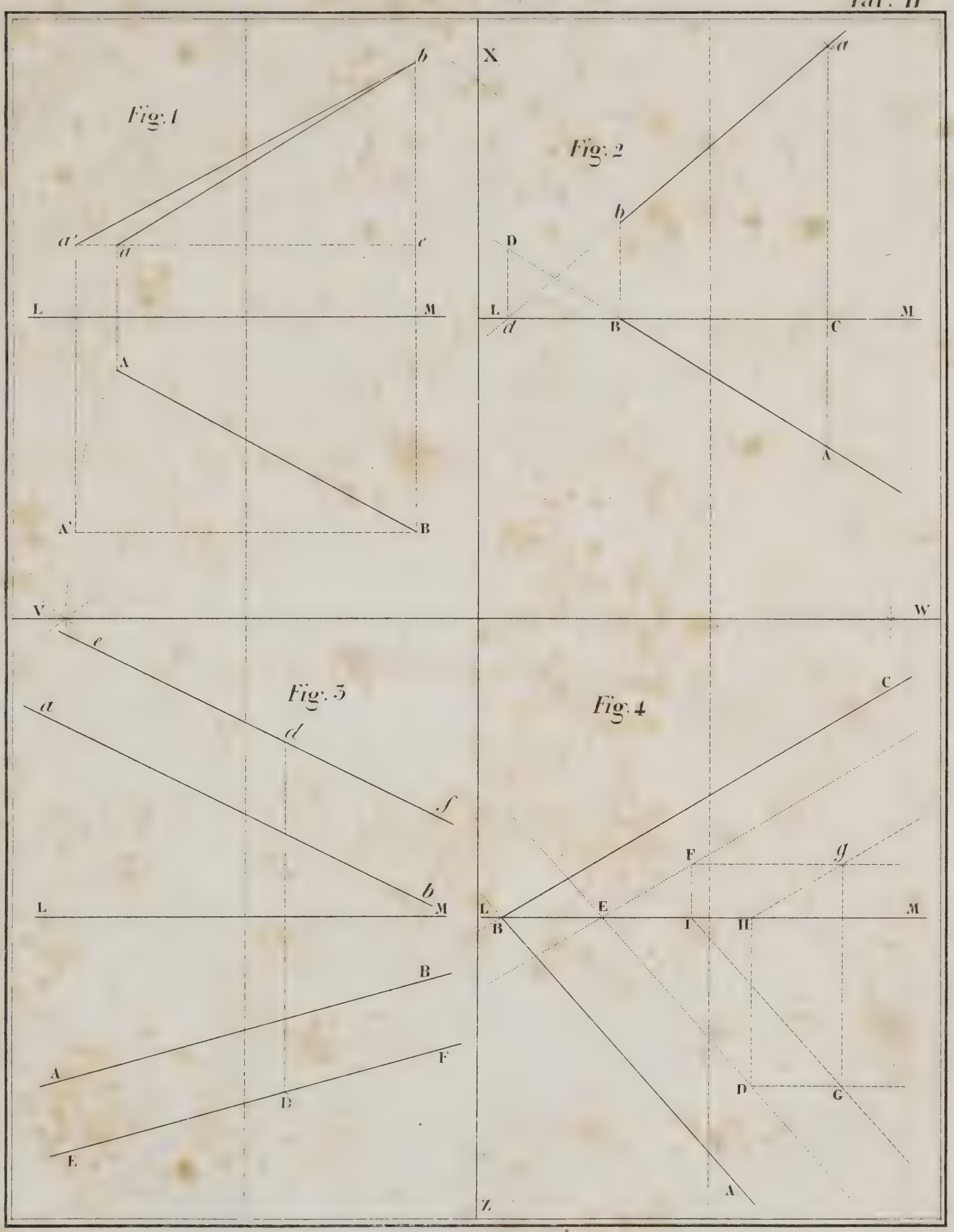
Seite 8 Zeile 2 von unten lies L M P Q, statt M N P Q.
— 56 — 3 v. u. l. 96, st. 95.
— 57 — 19 v. o. l. 96, st. 97.
— 61 — 8 v. u. l. aller, st. alle.
— 62 — 9 v. u. l. 101, st. 102.
— 63 — 14 v. o. l. 101, st. 102.
— 72 — 3 v. u. l. :: B″ b : B″ b' :: B b x st. :: B″ b : B″ b : B″ b' : B b x
— 77 — 19 v. o. l. $'g\ g'$, st. $'g\ 'g$.
— 79 — 4 v. o. l. A S, st. A F. Z. 7. l. $v'\ s$, st. $v\ s$. Z. 16 l. $v'\ t$, st. $v\ t$.
— 96 — 15 v. o. l. $= g\ h'$, st. $= g'\ h'$. Z. 21 l. A H, st. A G.
— 100 — 5 v. o. l. D C, st. E C. Z. 16 l. D C, st. B C.
— 106 — 3 v. o. l. A M, st. A B. Z. 10 l. E G F, st. E G F H. Z. 19 l. E G F, st. E G F H.
— 117 — 6 l. $d'\ s$ st. $d\ s$.
— 136 — 9 l. R Q R′ Q′, st. P Q P′ Q′. Z. 10 l. R, st. P.
— 137 — st. E K ist auf dieser Seite überall D O zu lesen. Z. 12 v. u. l. k, o . . ., st. K, O . . . Z. 10 v. u. l. $b\ m$, $c\ l$, st. $b\ l$, $c\ m$.
— 143 — 5 v. u. l. H A K, st. H A K′.
— 144 — 16 v. o. st. $\pi'\ \varphi'$, l. $\pi'\ \varphi'$ parallel zu $\beta'\ a$. Z. 25 st. $= a\ q$, l. $= a'\ q$. Z. 5 v. u. l. nicht nothwendig, st. ganz willkührlich.
— 147 — 10 v. u. l. (K, E) st. (K, k). Z. 5 v. u. l. N J′ st. N J.



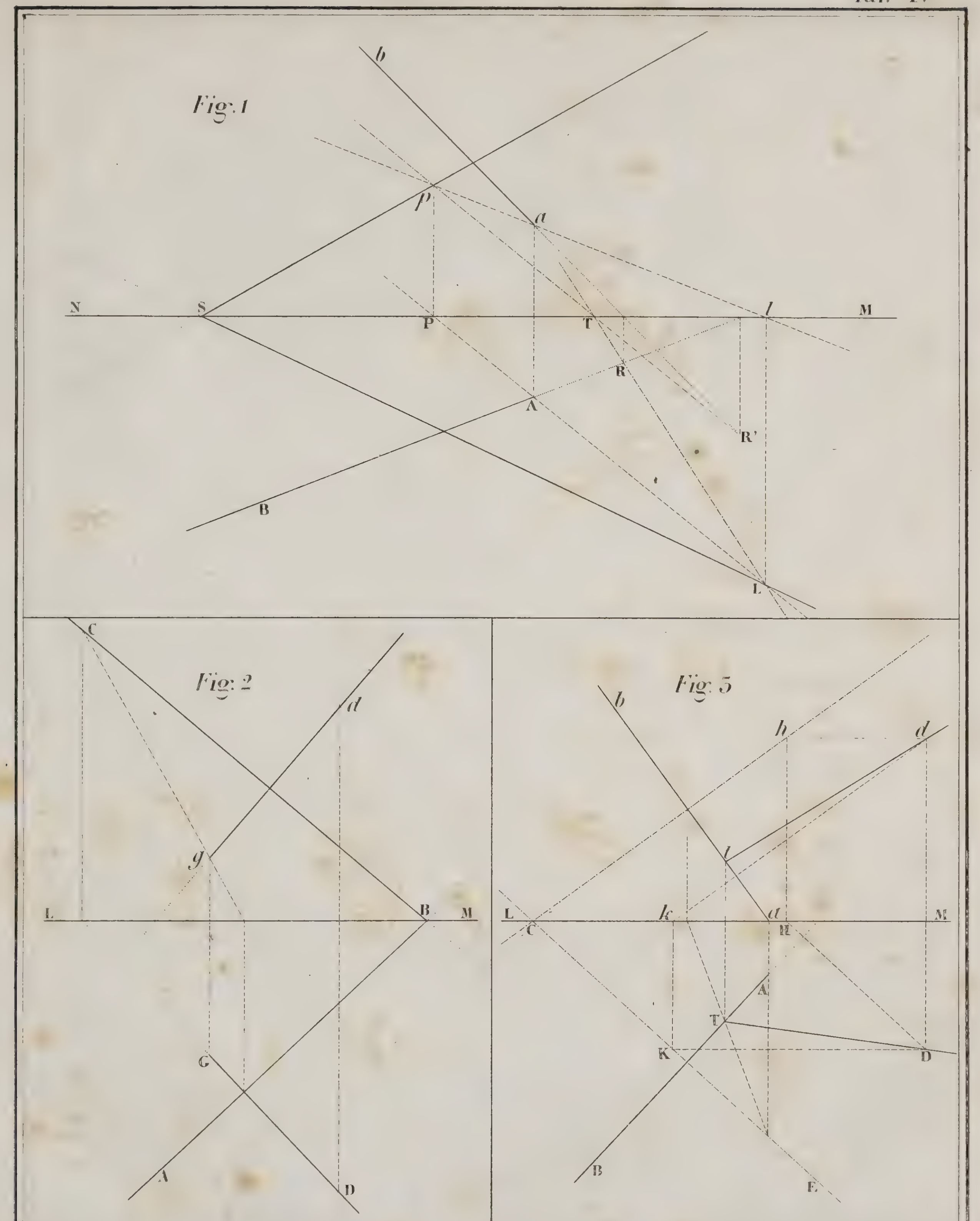

Fig: 1
A
B
C
D
E
F
G
P
Q
a
b
c
d
e
f
g
M
N
Fig: 2
A
B
P
Q
a
b
M
N
Fig. 3
P
b'
B
P''
M
N
b''
Q
D
b
a'
A
a''
C
a
N'
Q'
L
O
O'
Fig. 4
A
B
A'
B'
A''
B''
A'''
B'''
A''
B'''
A'''
B'''



Gerade Linie und Ebene





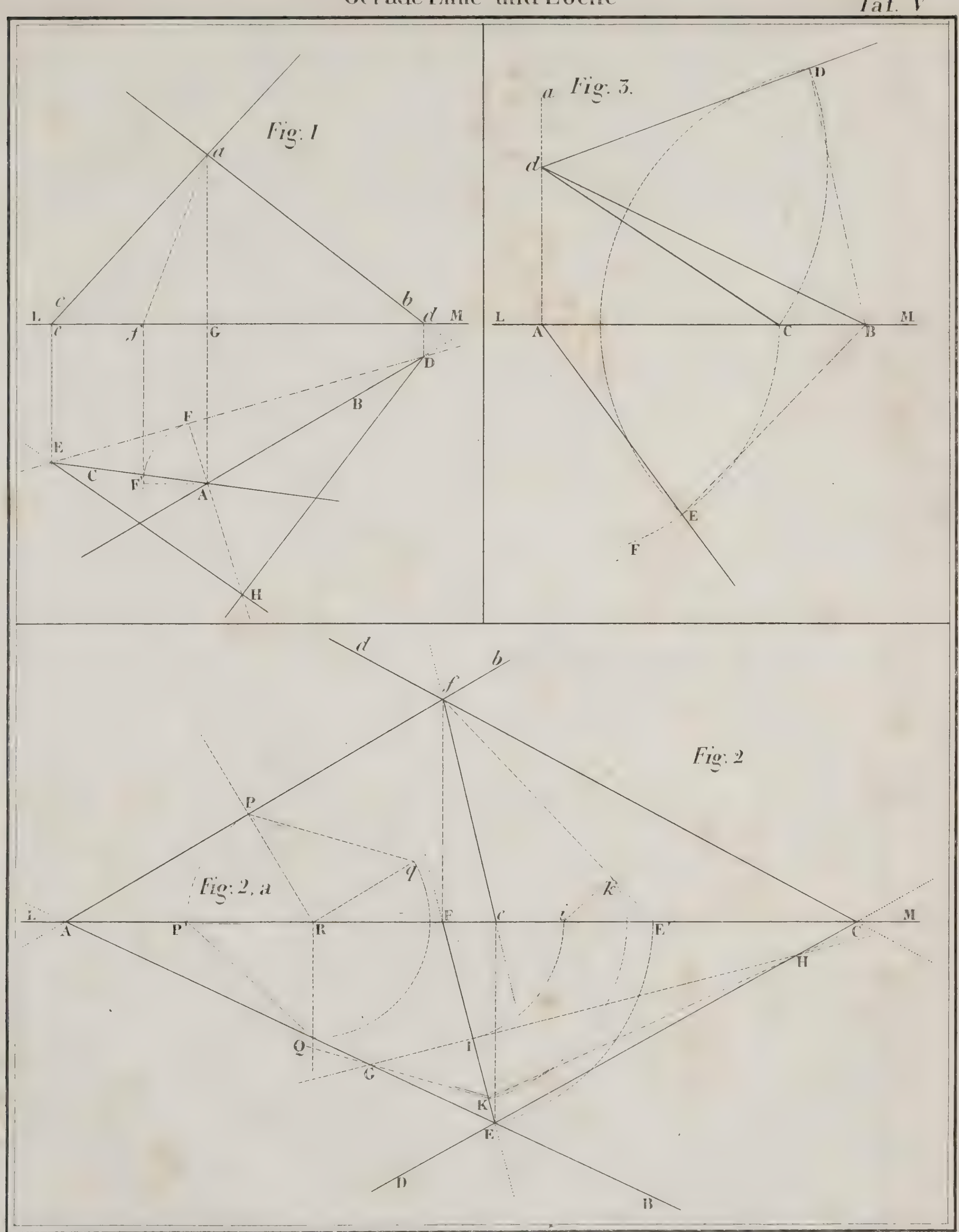

Fig. 1
b
p
a
N
S
P
T
l
M
R
A
R'
B
L
Fig. 2
C
d
g
L
B
M
G
A
D
Fig. 5
b
h
d
l
L
C
k
a
H
M
A
T
K
D
B
E



Darstellende Geometrie.

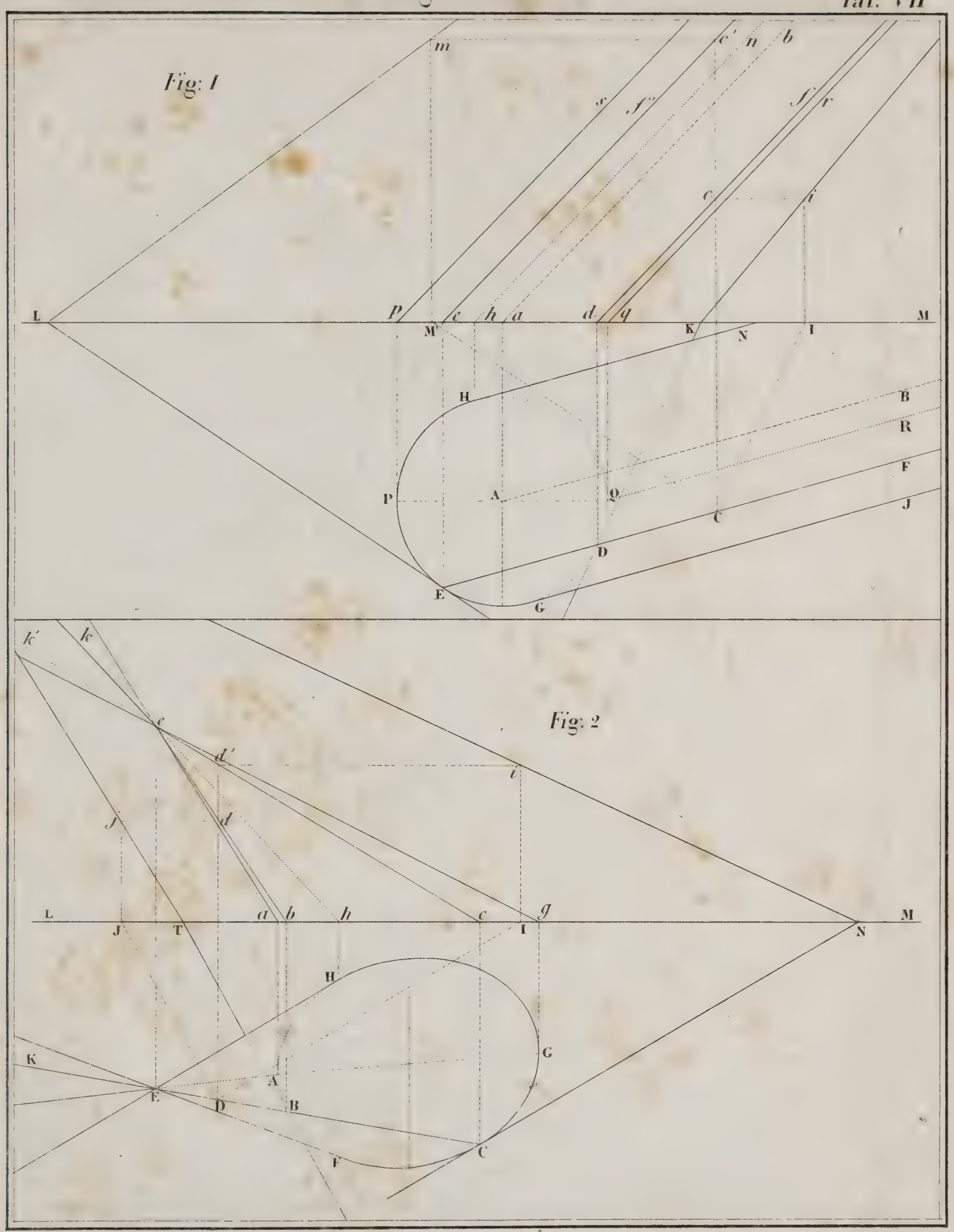
Gerade Linie und Ebene

Taf. V



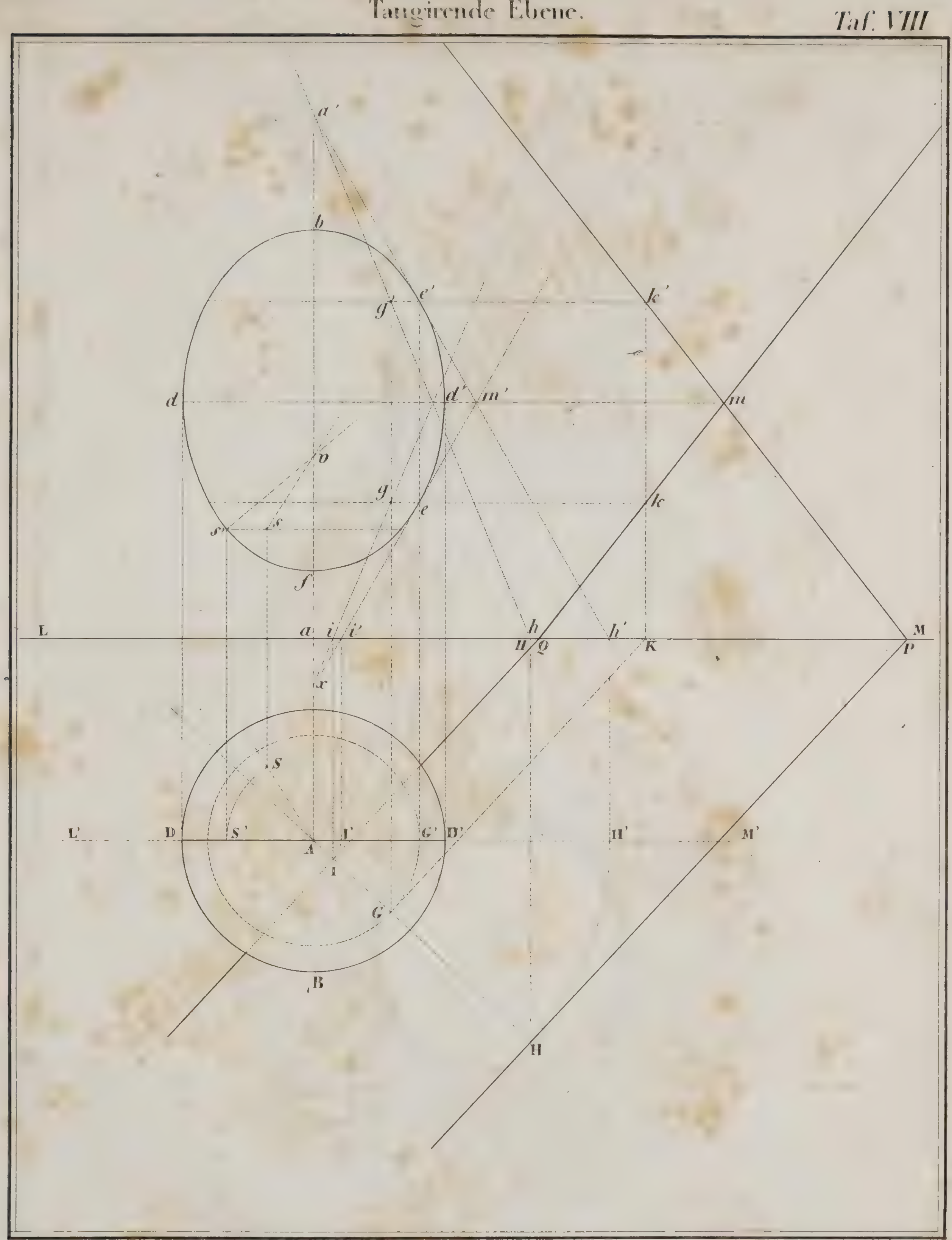


Tangirende Ebenen.



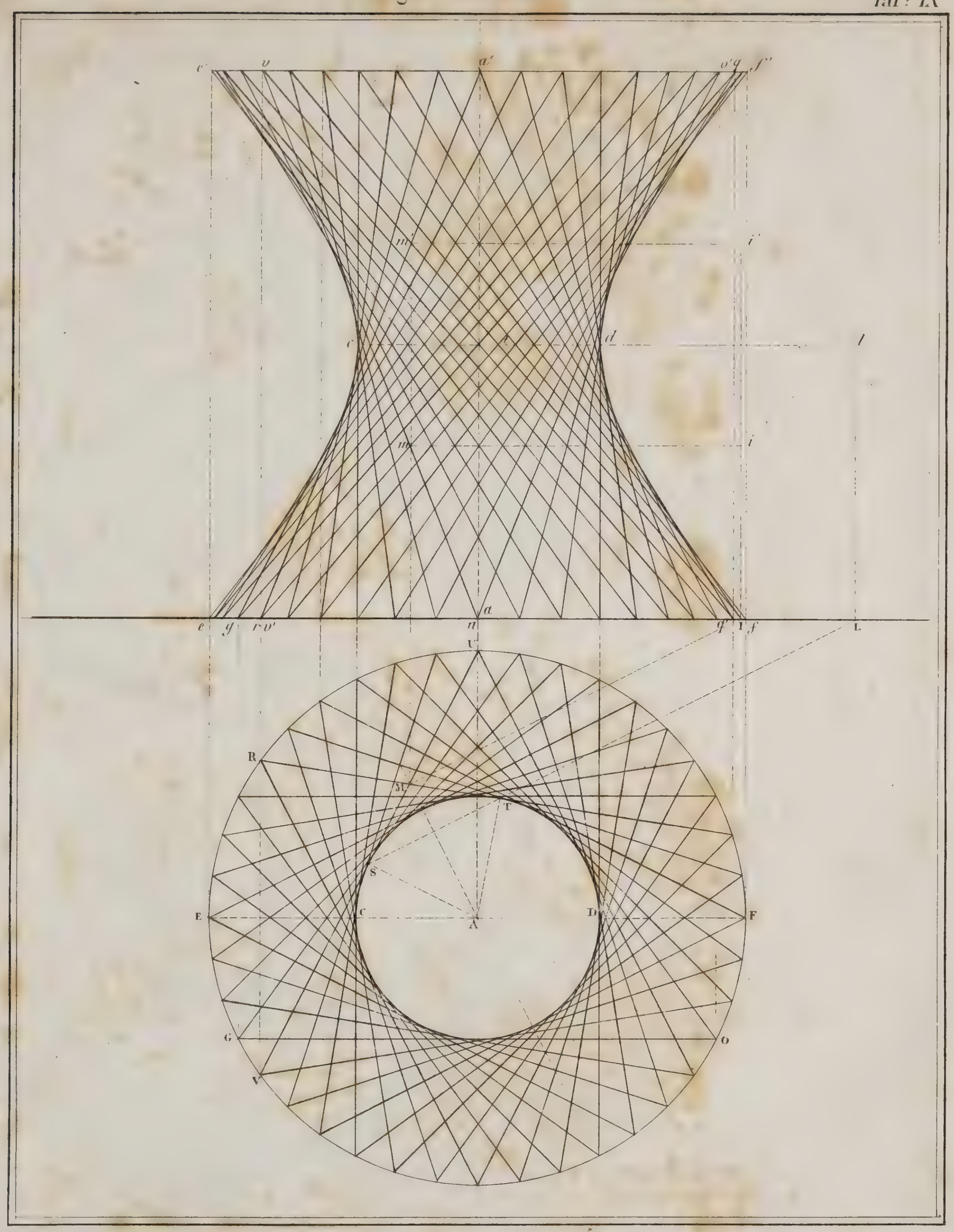


Tangirende Ebene.





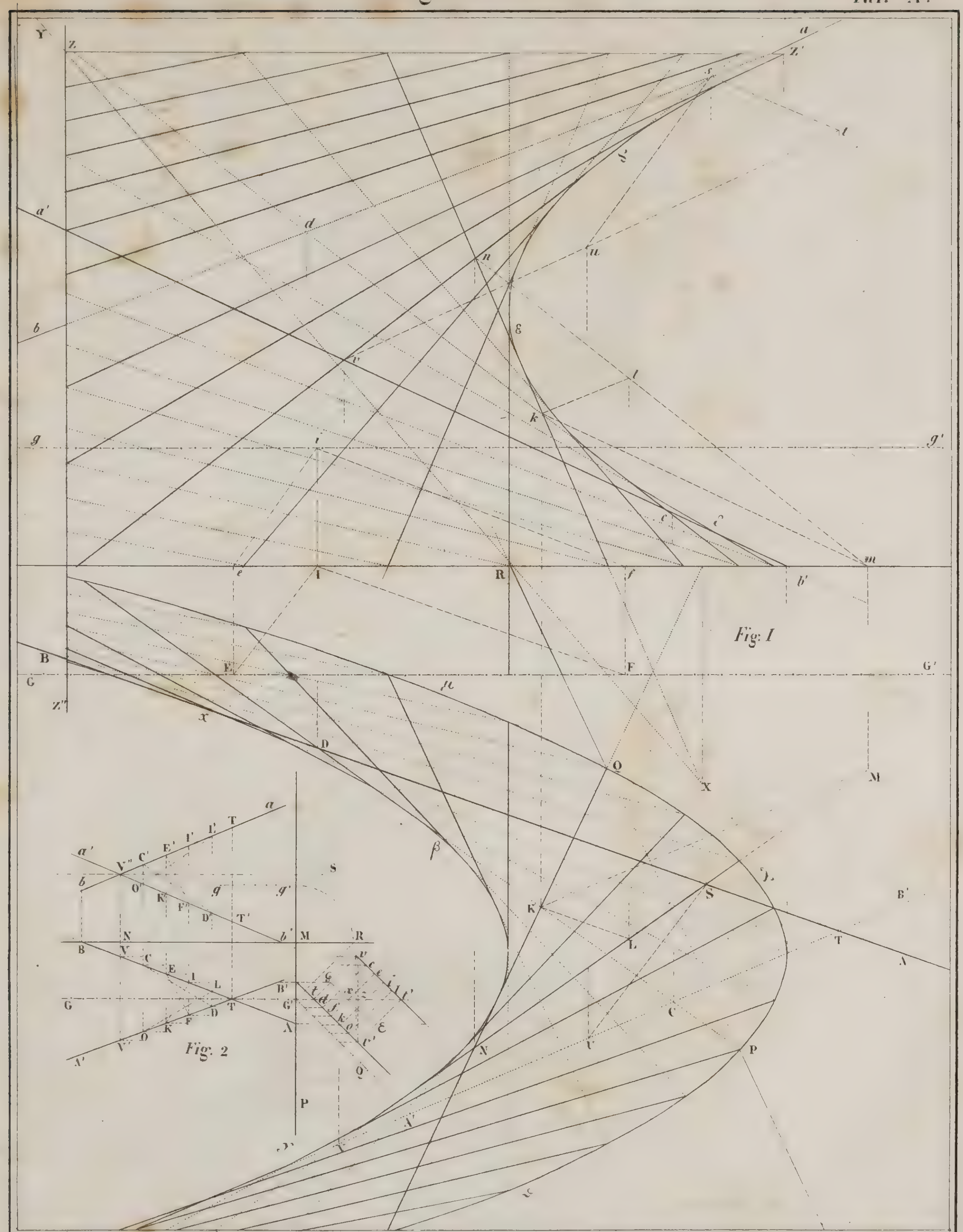
Tangirende Ebenen.





Darstellende Geometrie.

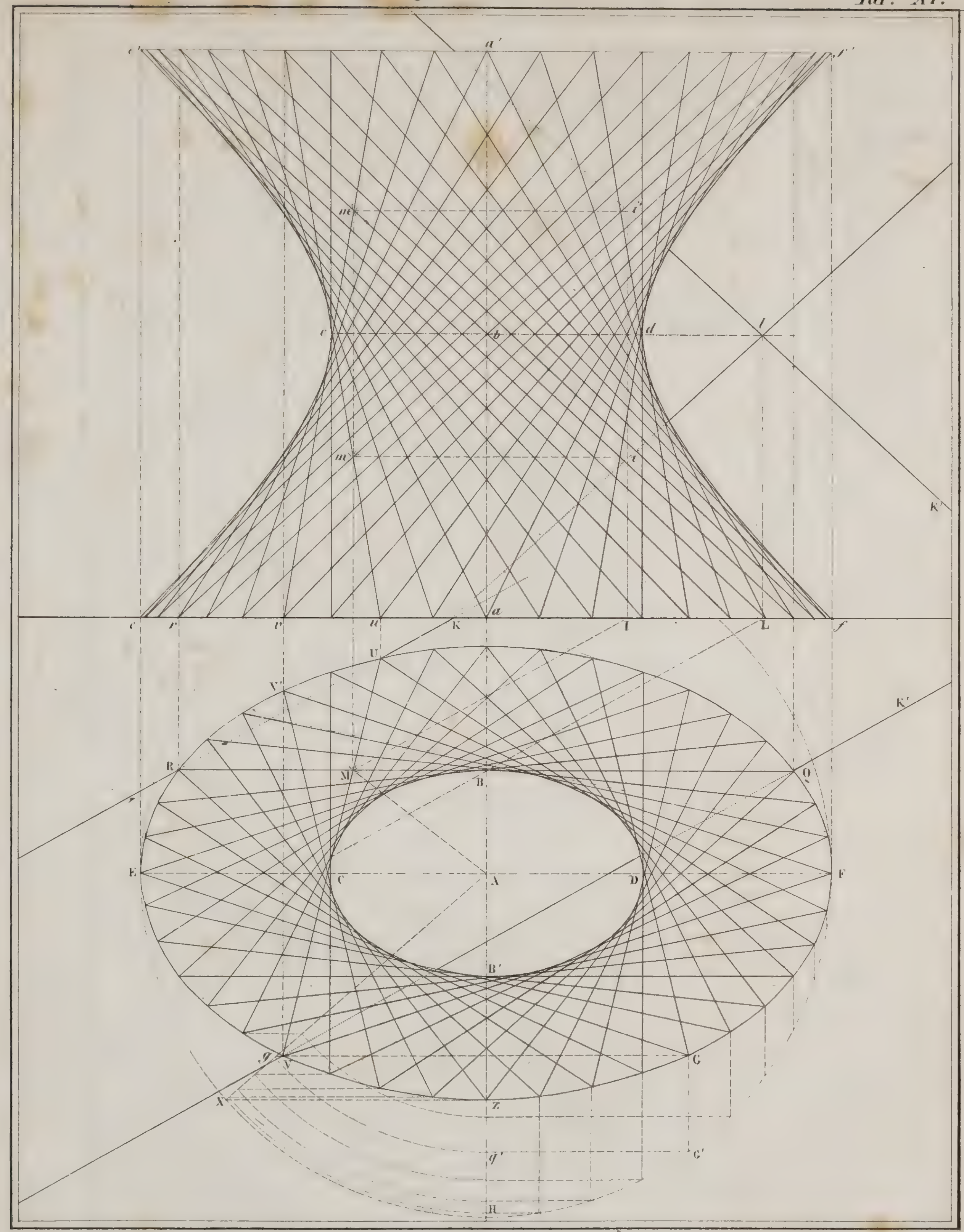
Tangirende Ebenen.



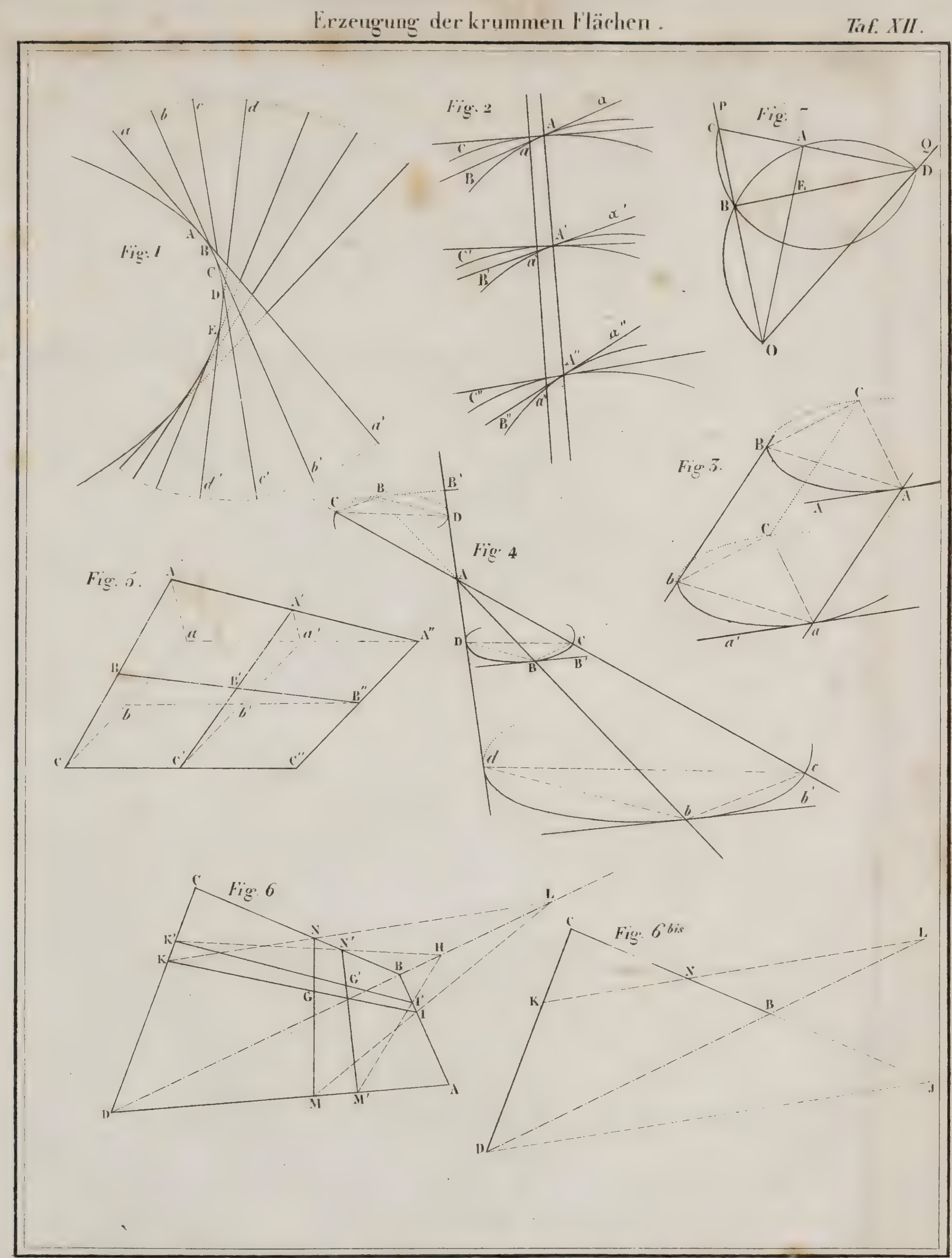


Darstellende Geometrie.

Tangirende Ebenen.

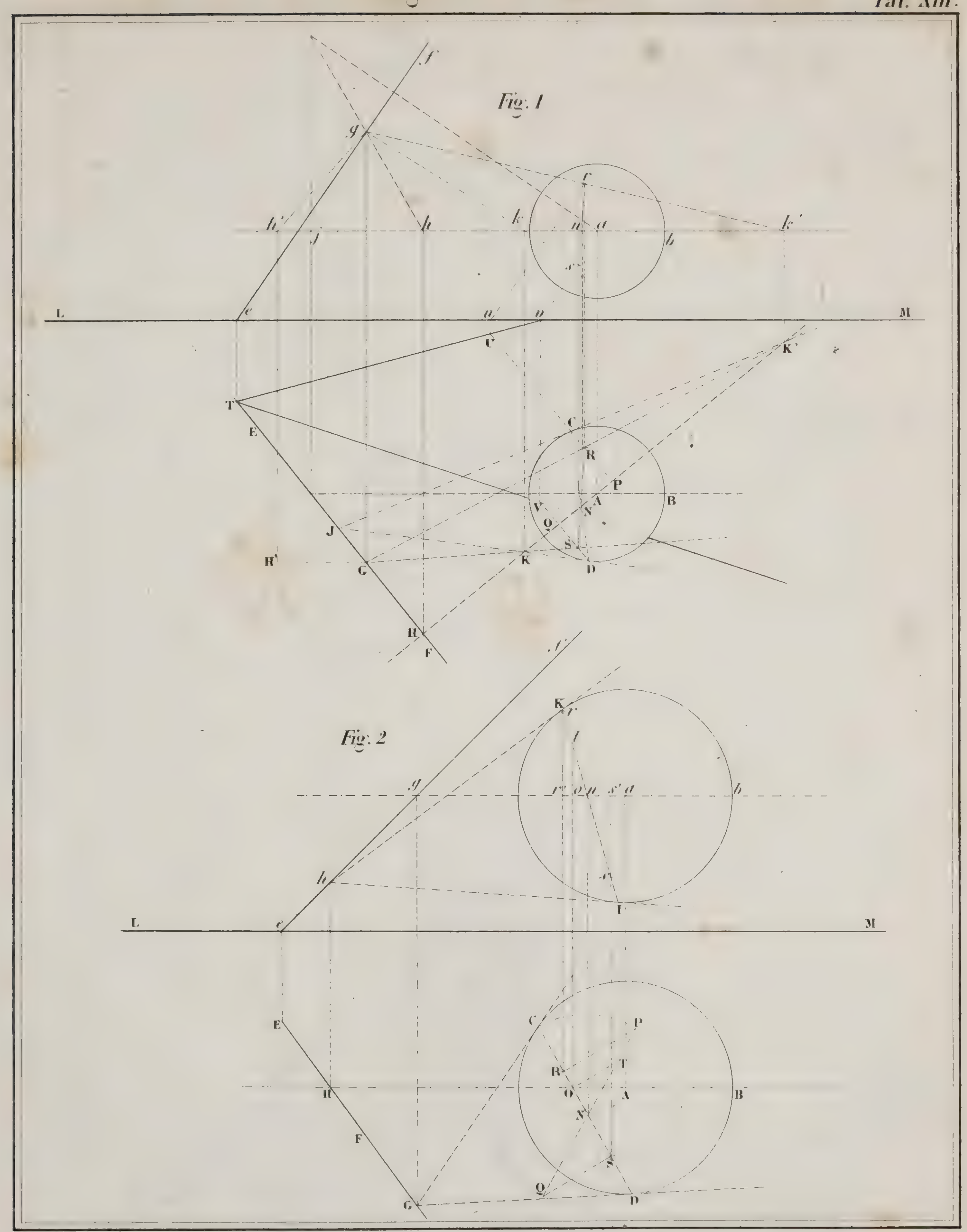





Fig. 1
Fig. 2
Fig. 3
Fig. 4
Fig. 5.
Fig. 6
Fig. 6 bis
Fig. 7



Tangirende Ebenen.

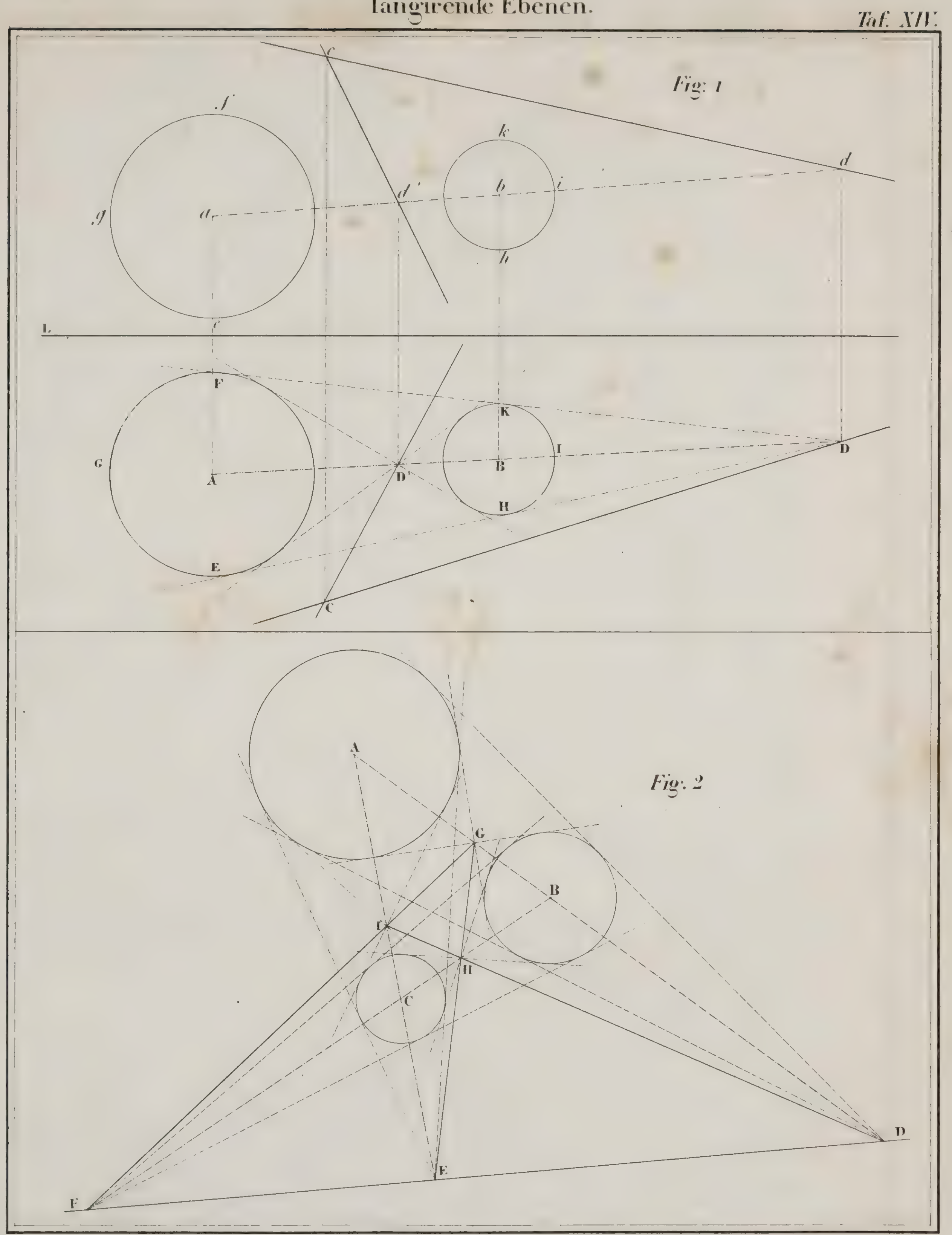




Darstellende Geometrie.

Tangirende Ebenen.

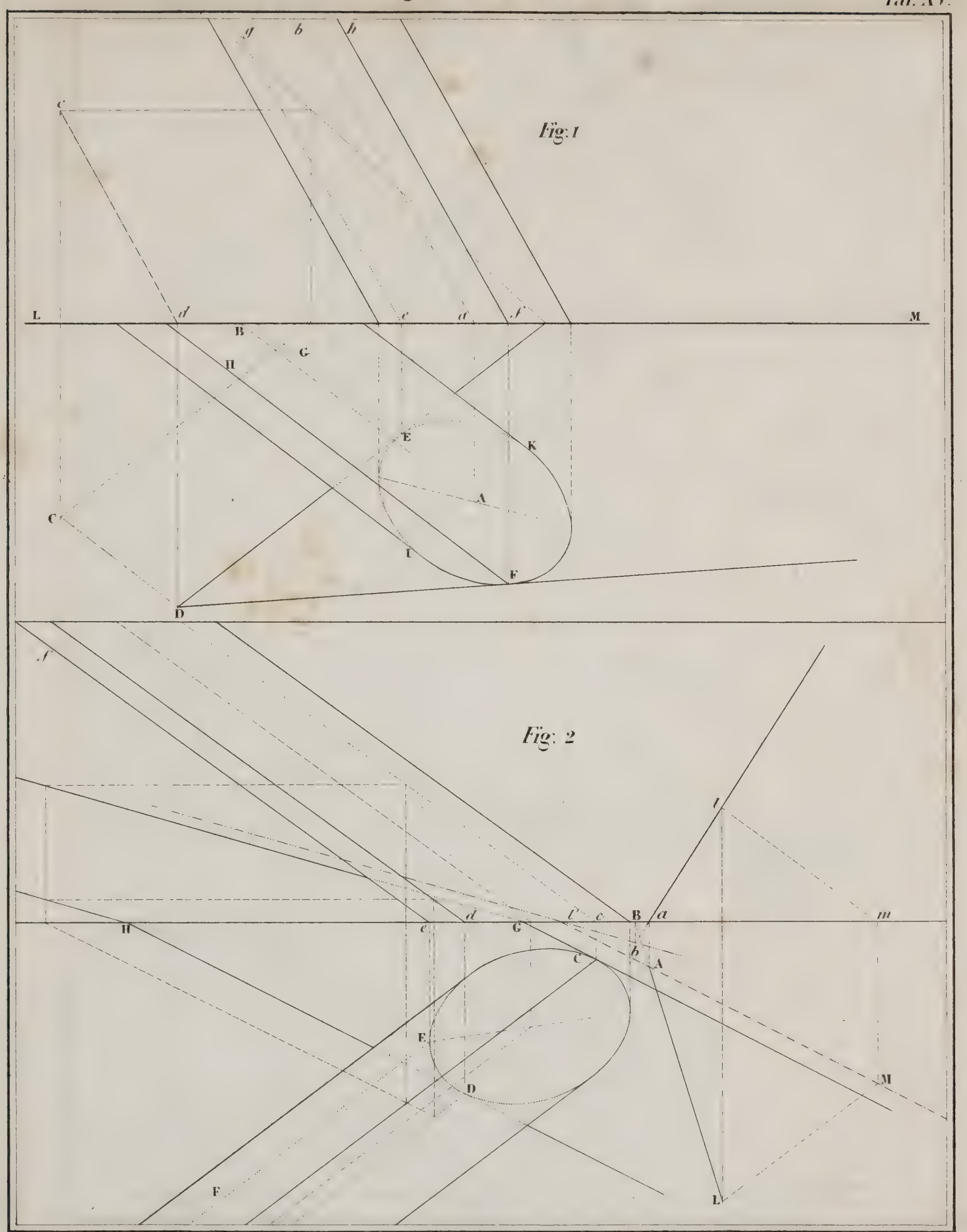
Taf. XIV.





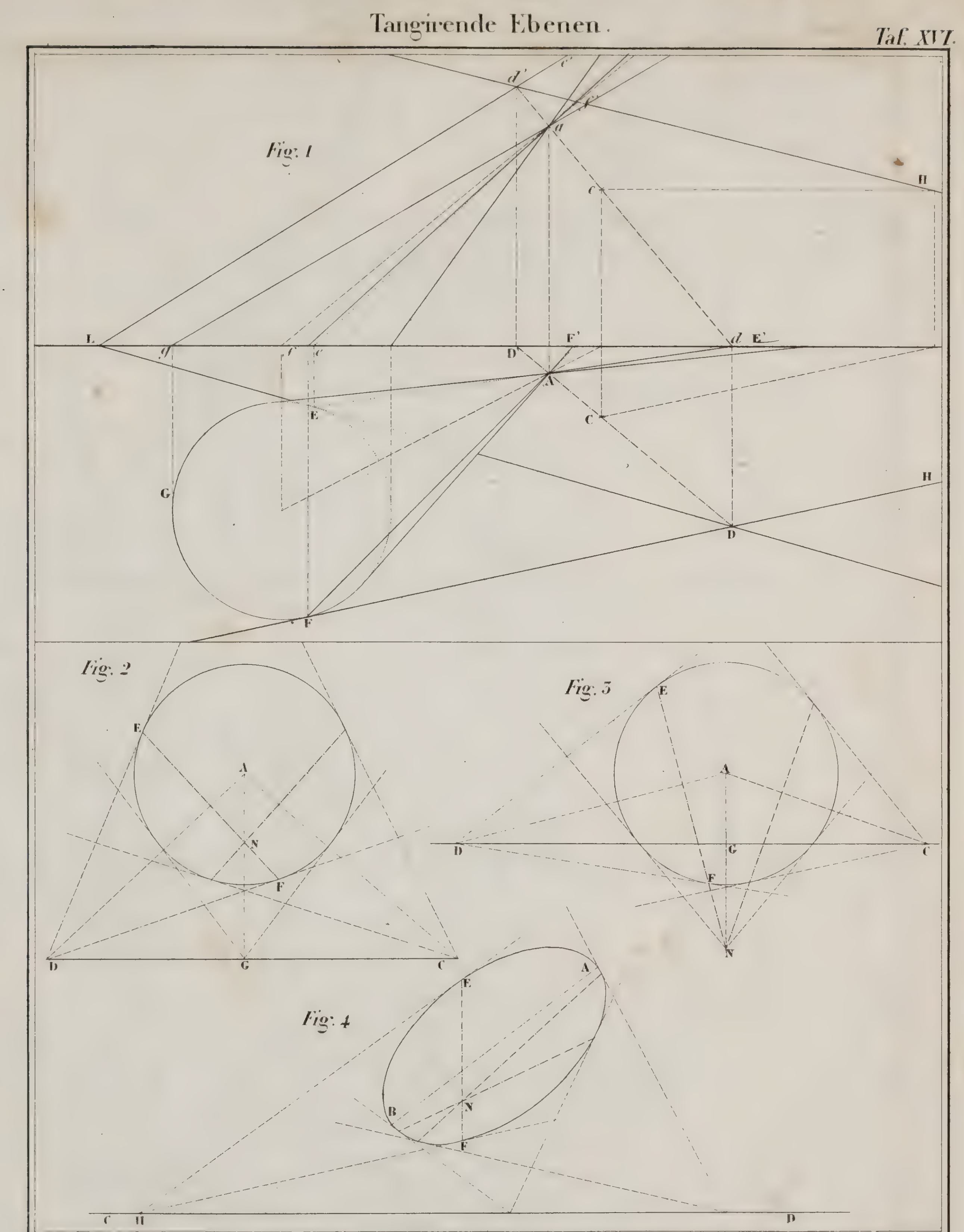
Darstellende Geometrie.

Tangirende Ebenen.

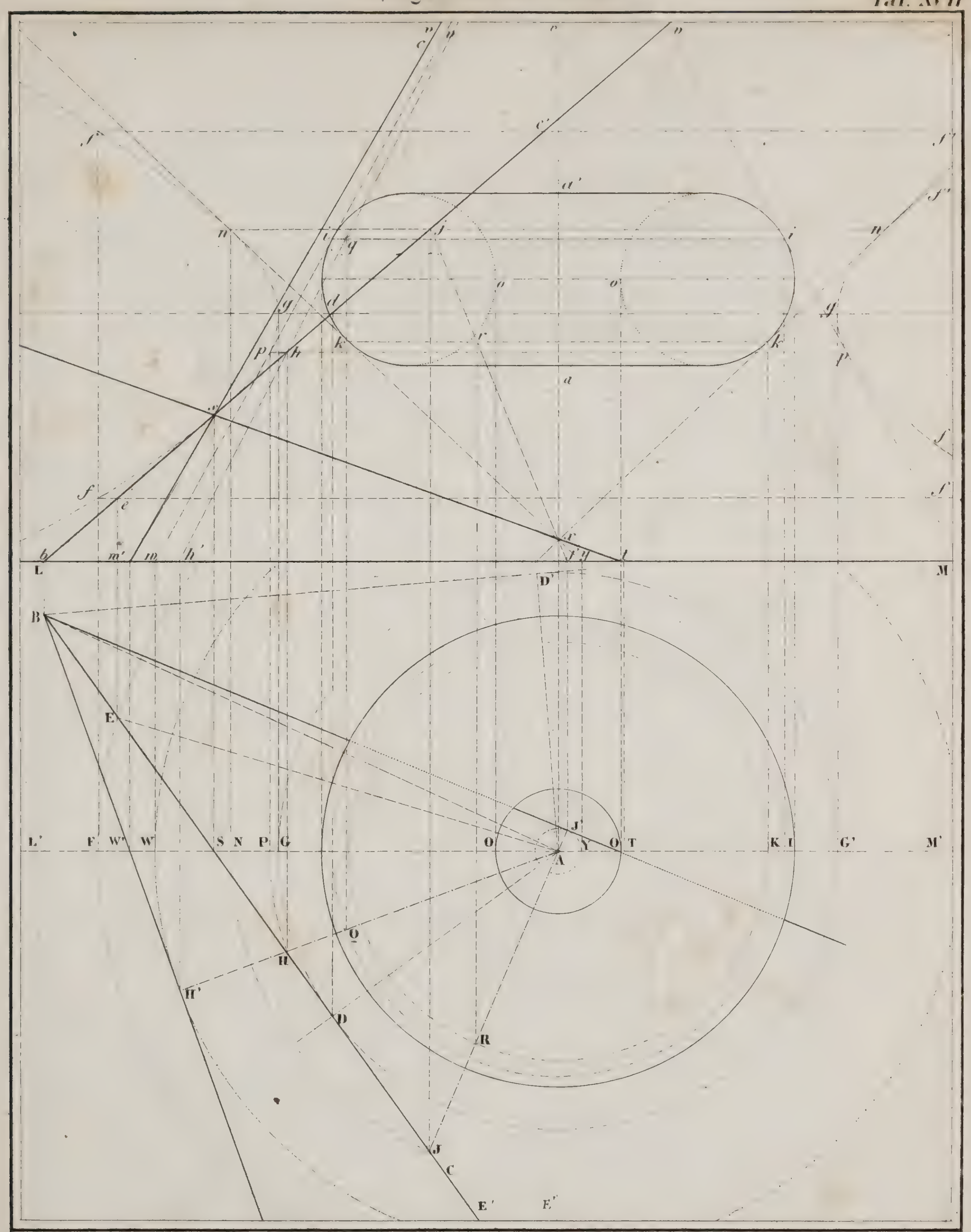


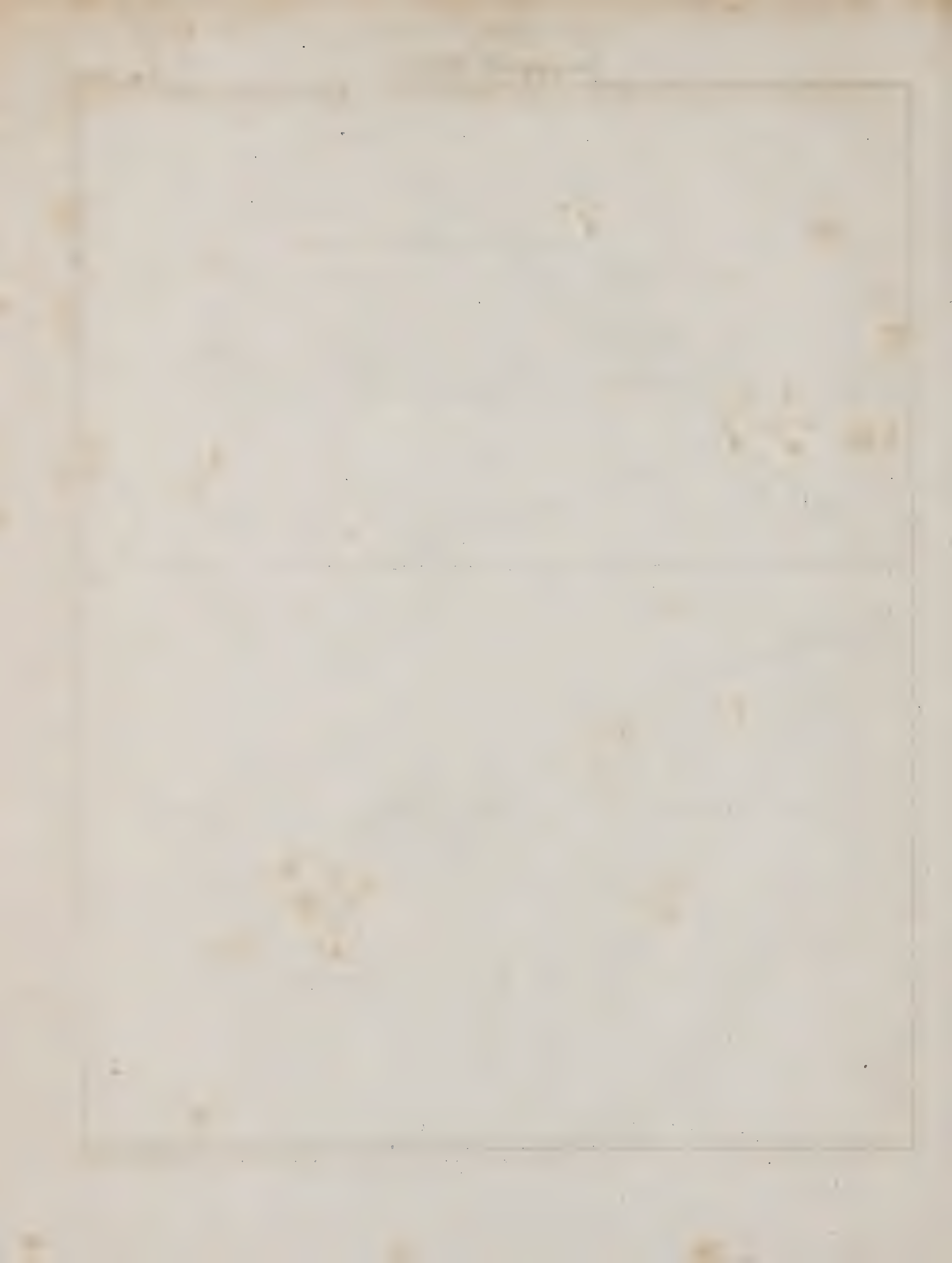


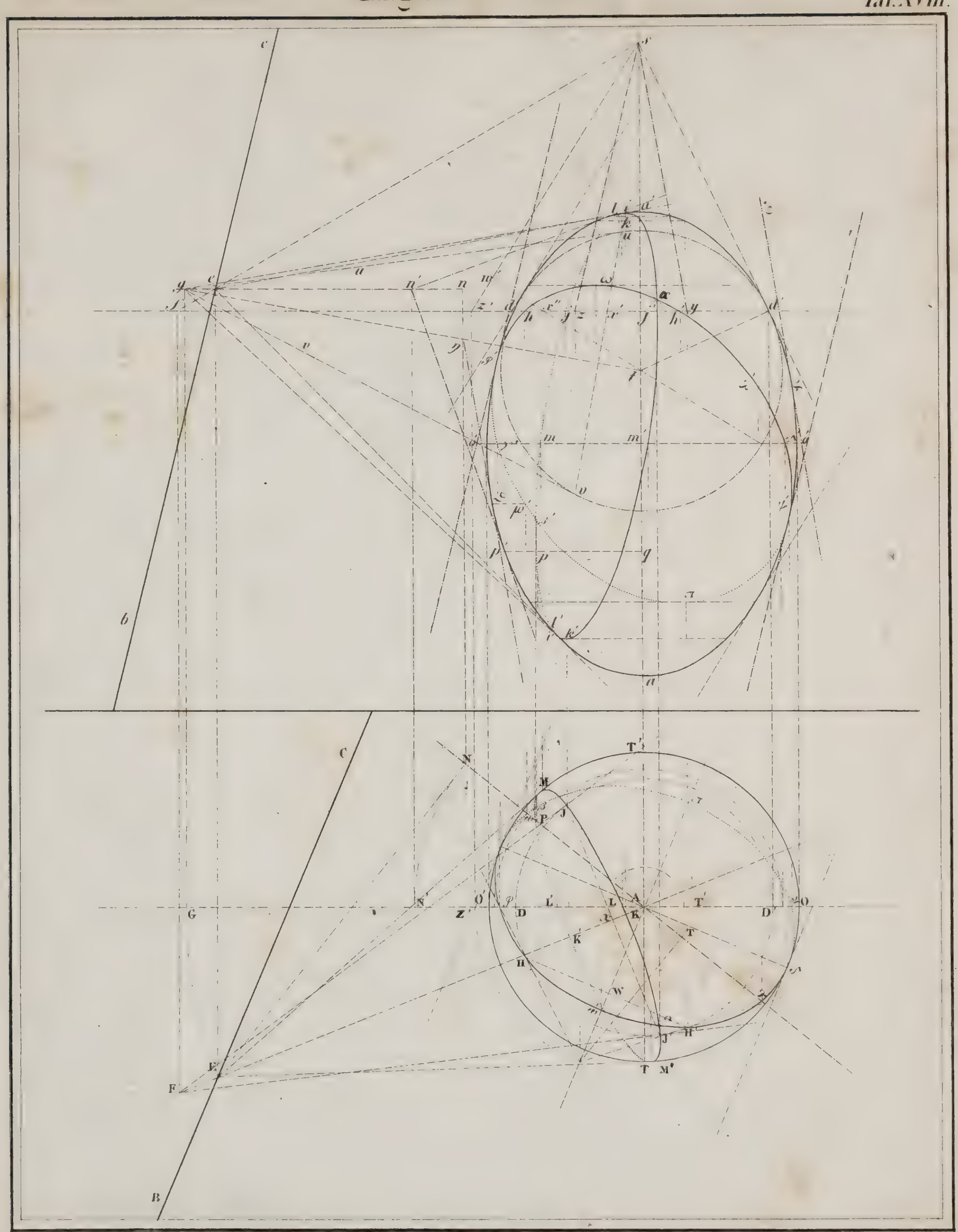
Tangirende Ebenen.







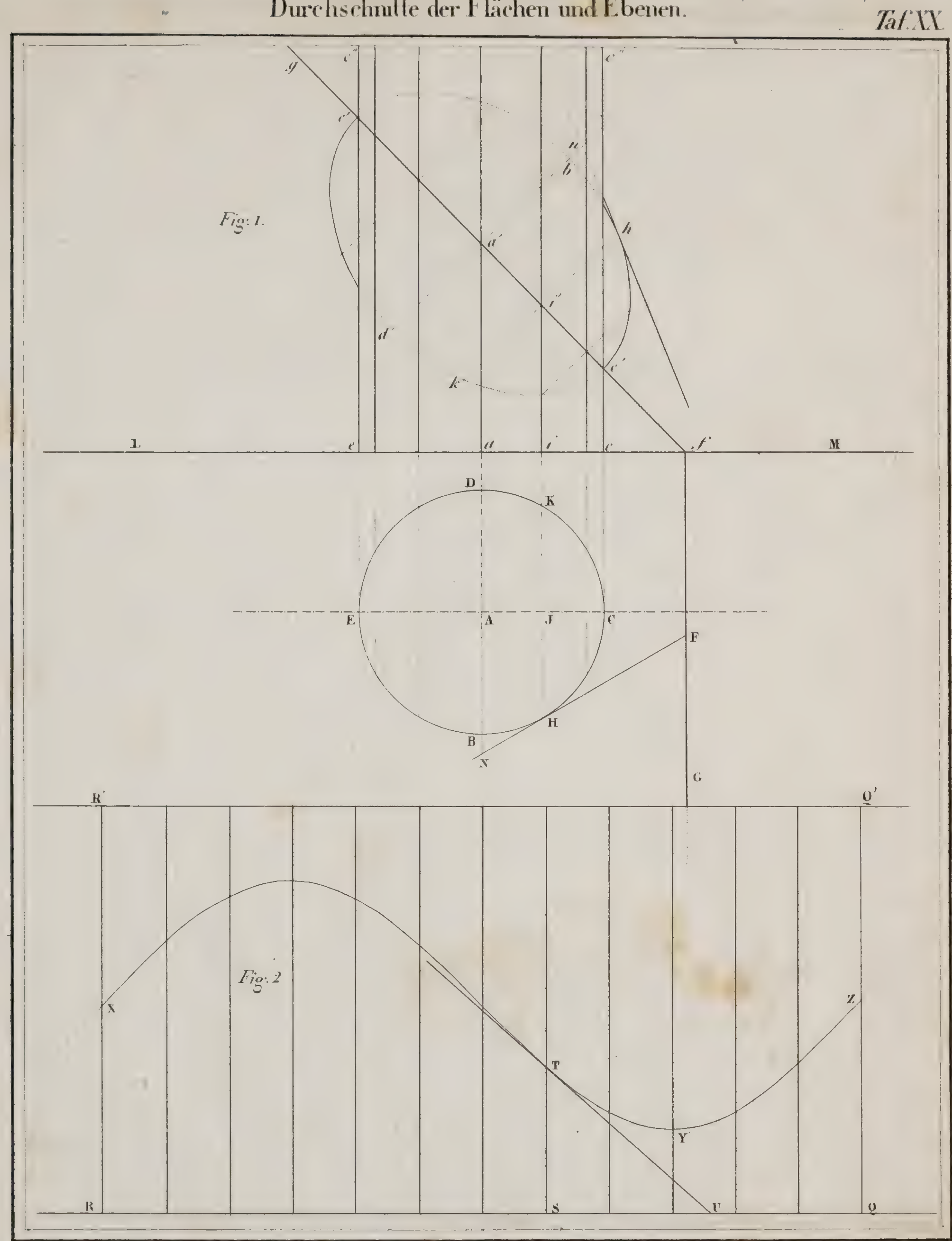




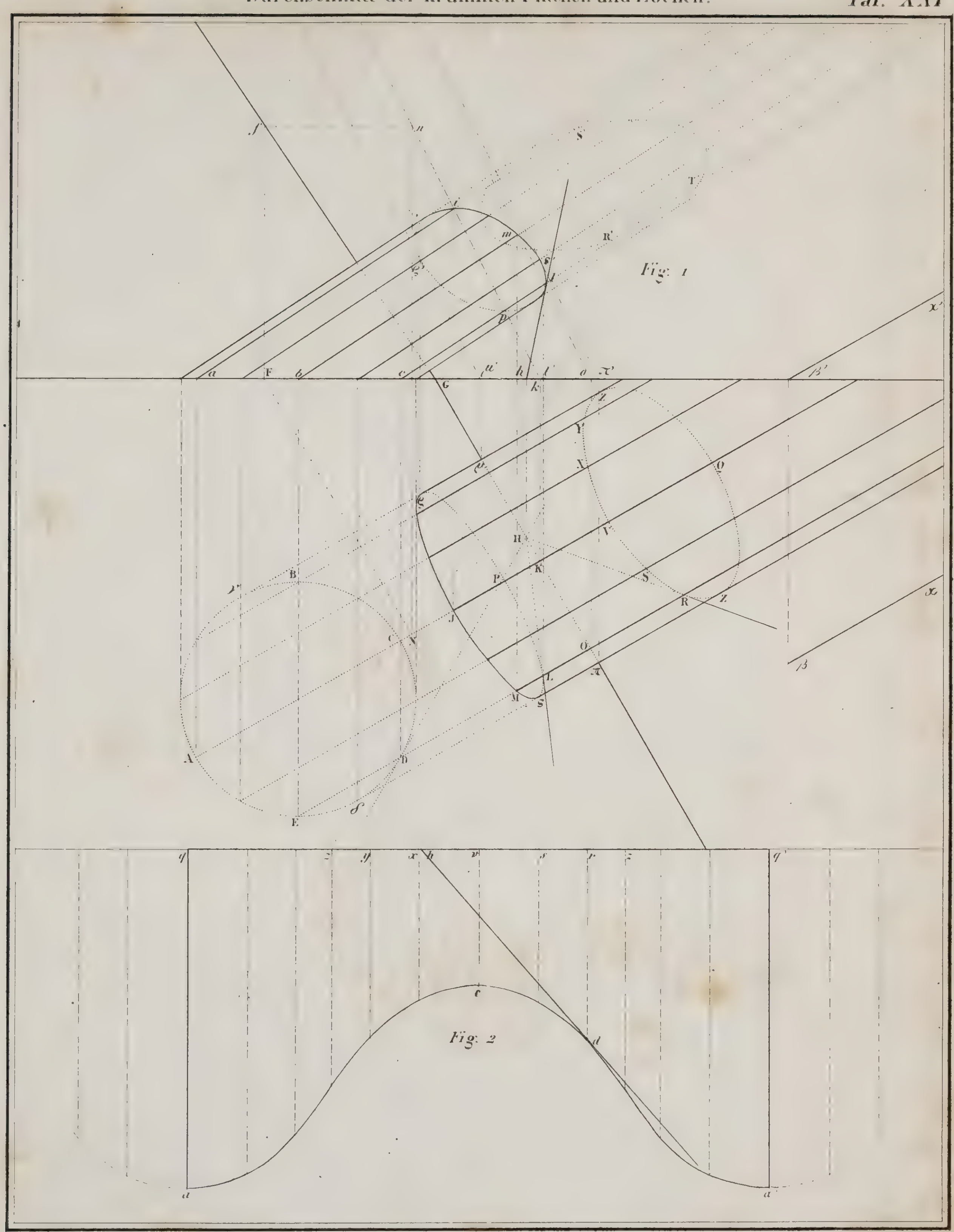




Durchschnitte der Flächen und Ebenen.

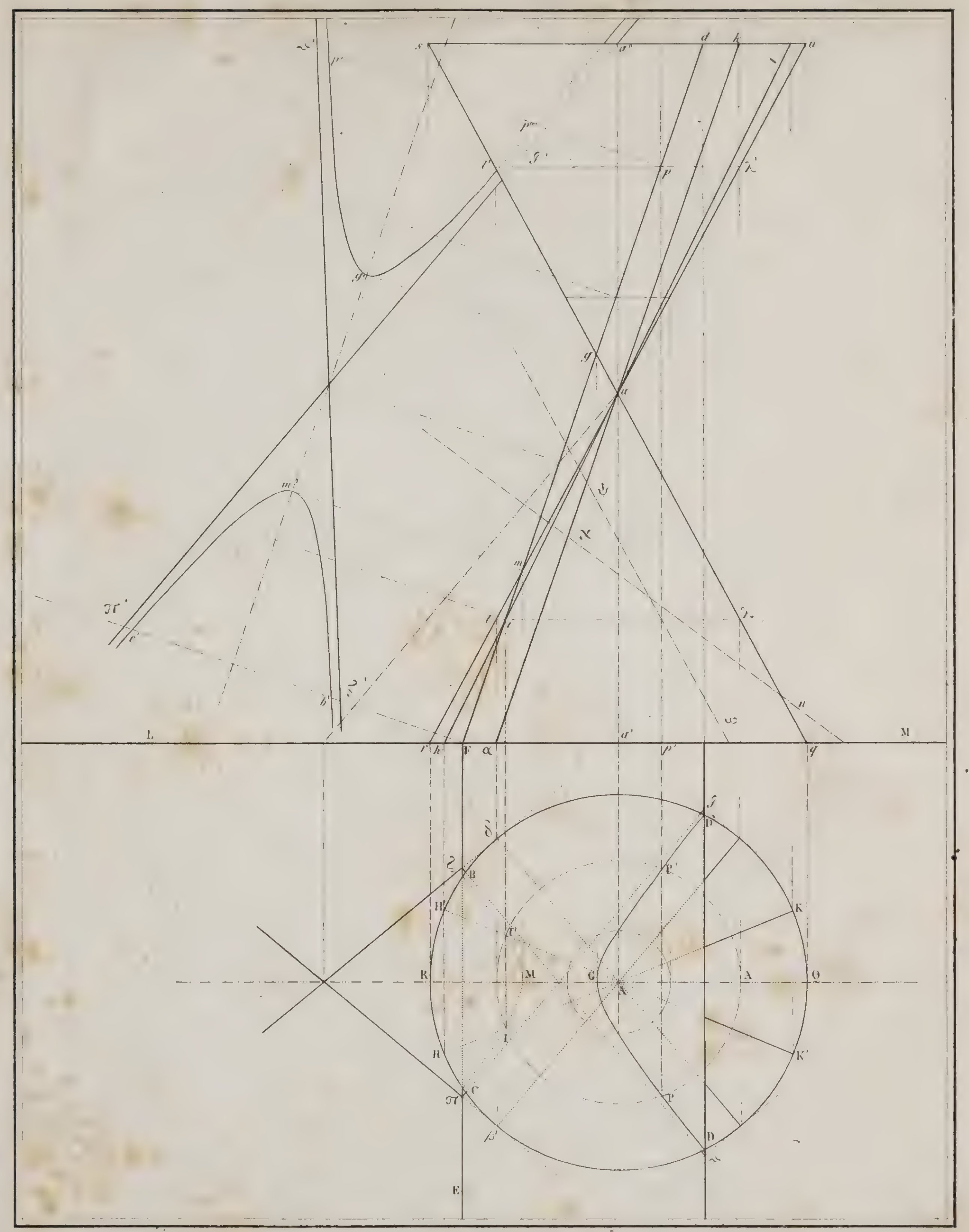




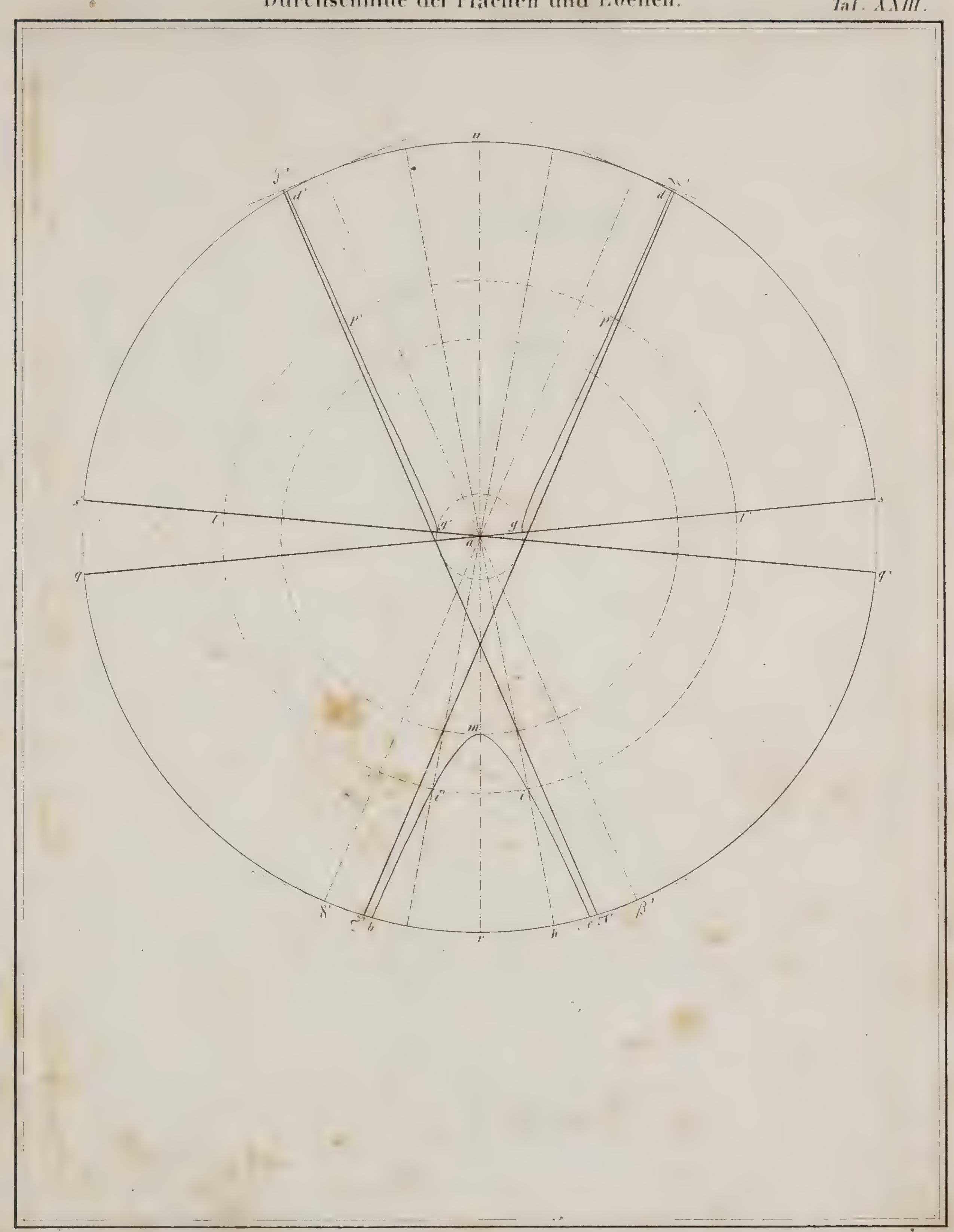

Fig: 1
Fig: 2



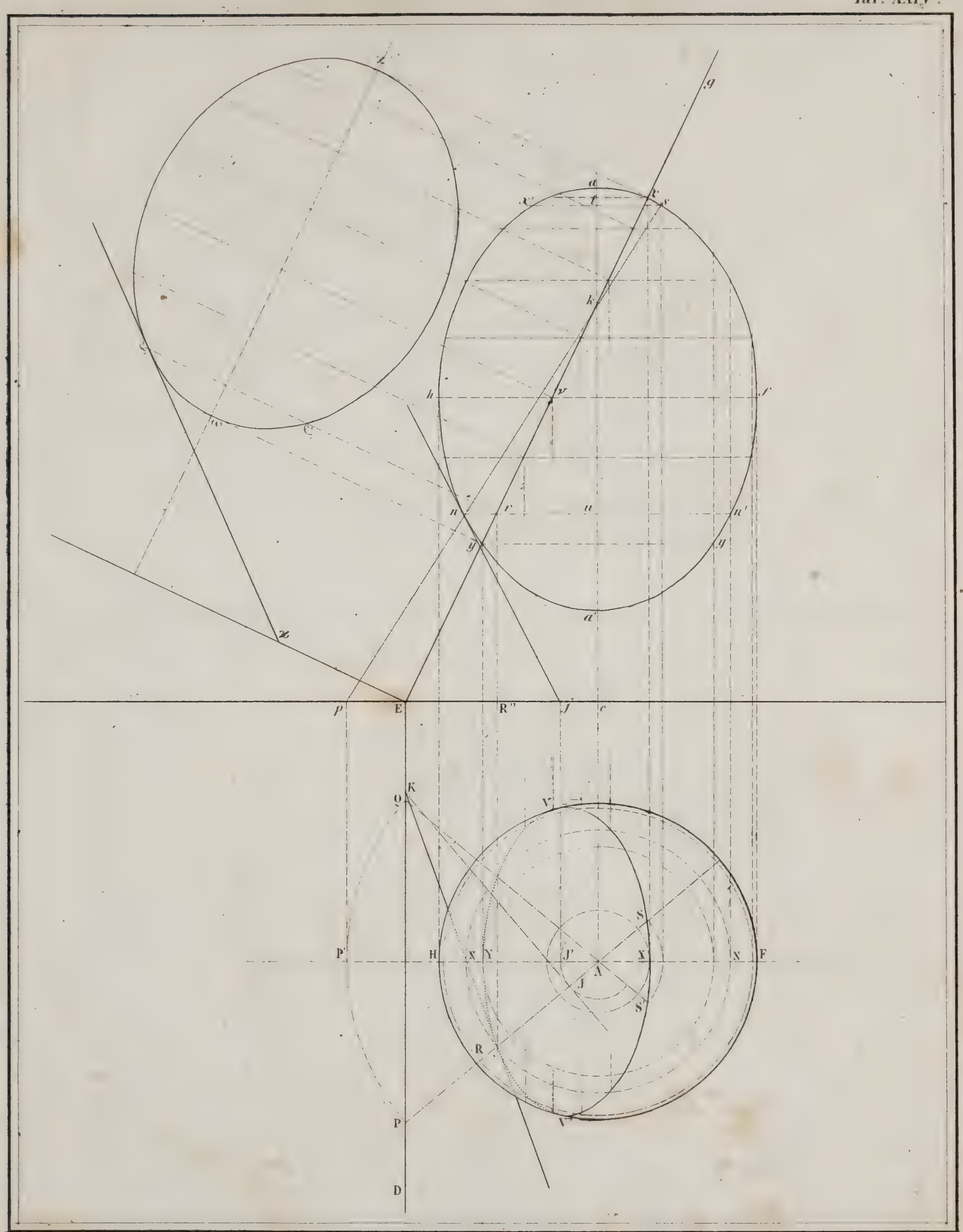
Durchschnitte der Flächen und Ebenen.

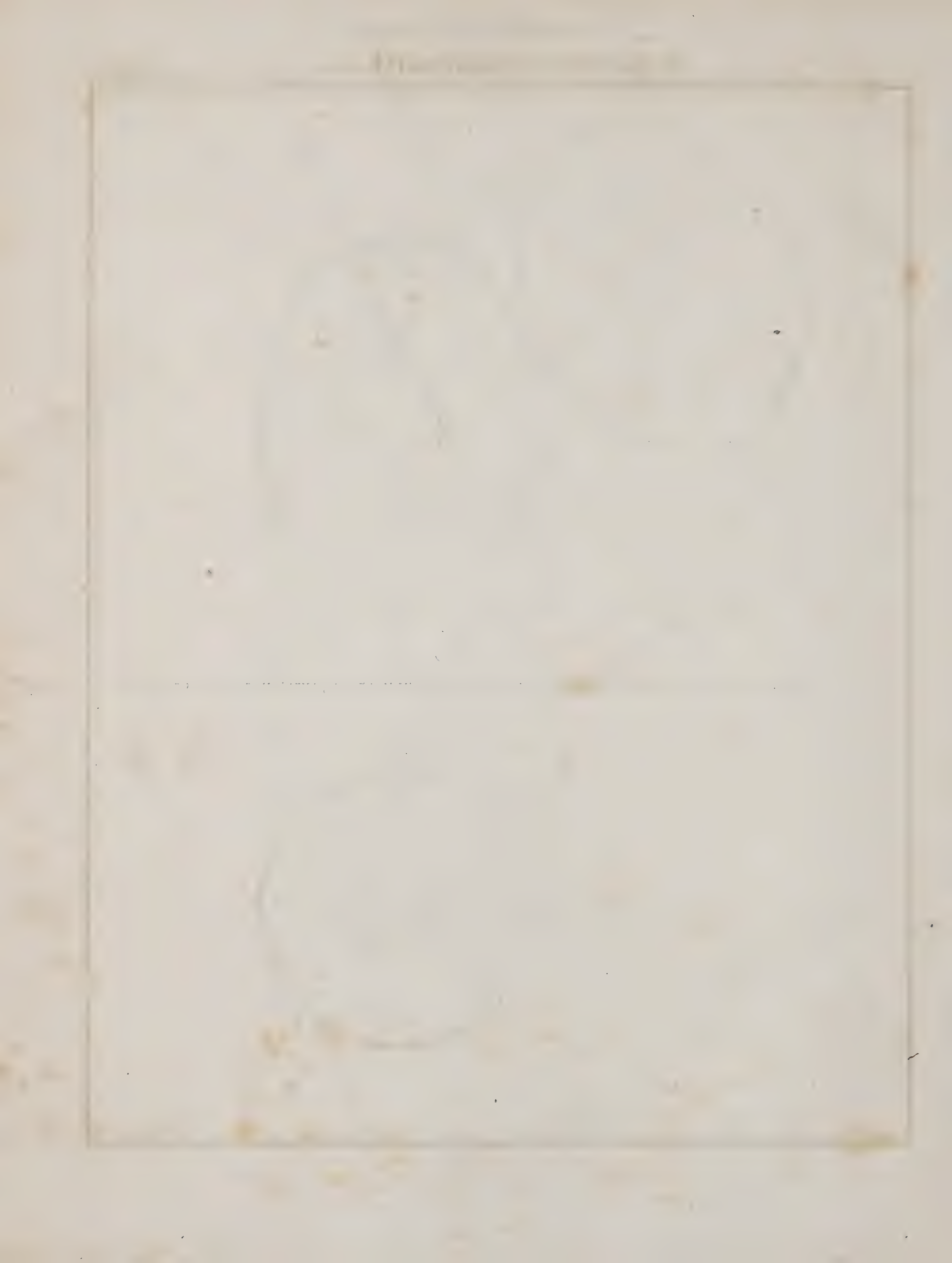




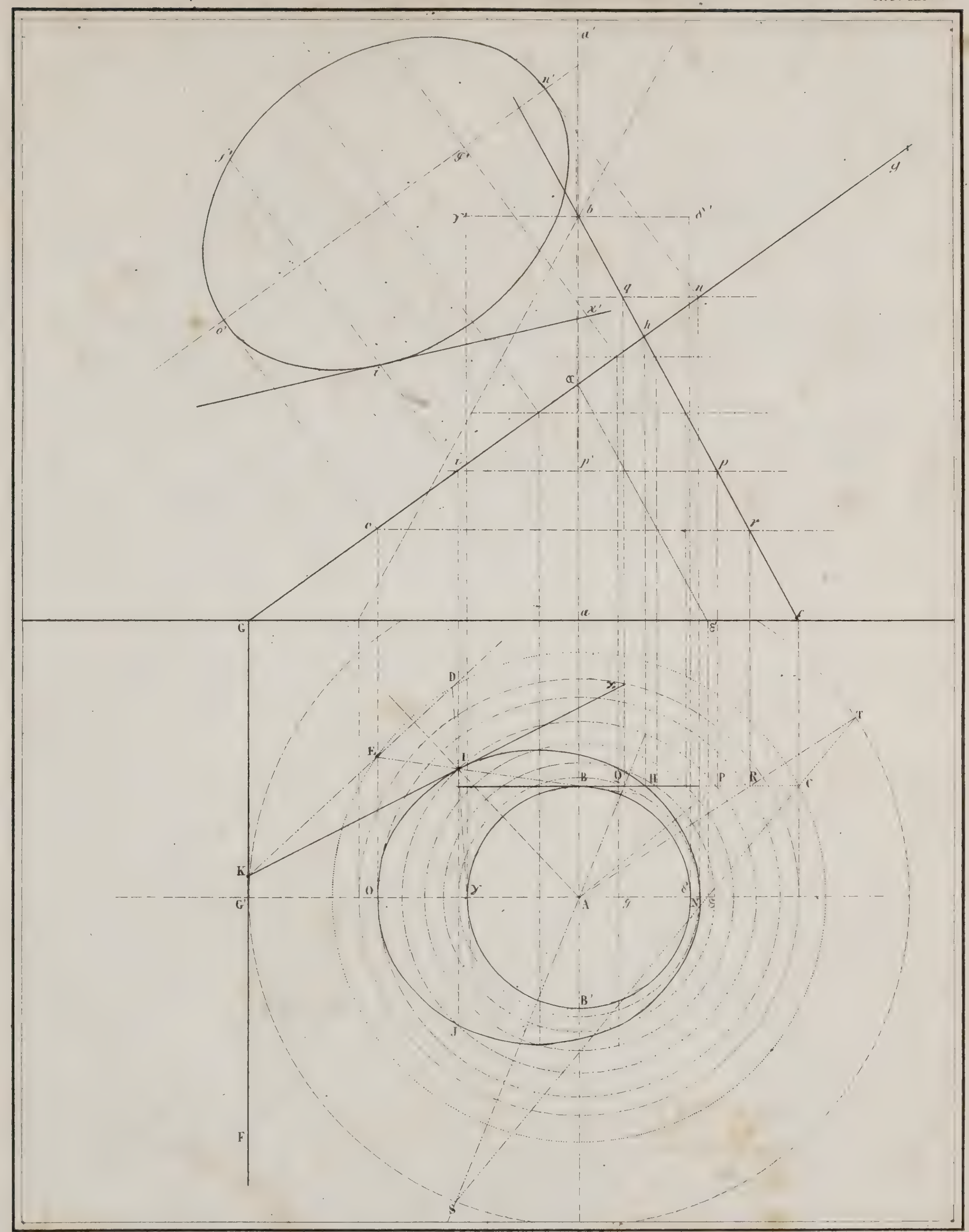

u
d'
d
p'
p
s'
s
l
l'
g'
g
a
q
q'
m
i'
i
b
c
r
h




g
k
h
v
f
n
r
u
n'
y
a'
x
p
E
R"
j
c
K
O
V
S
P'
H
N
Y
J'
X
N
F
A
J
S'
R
P
D

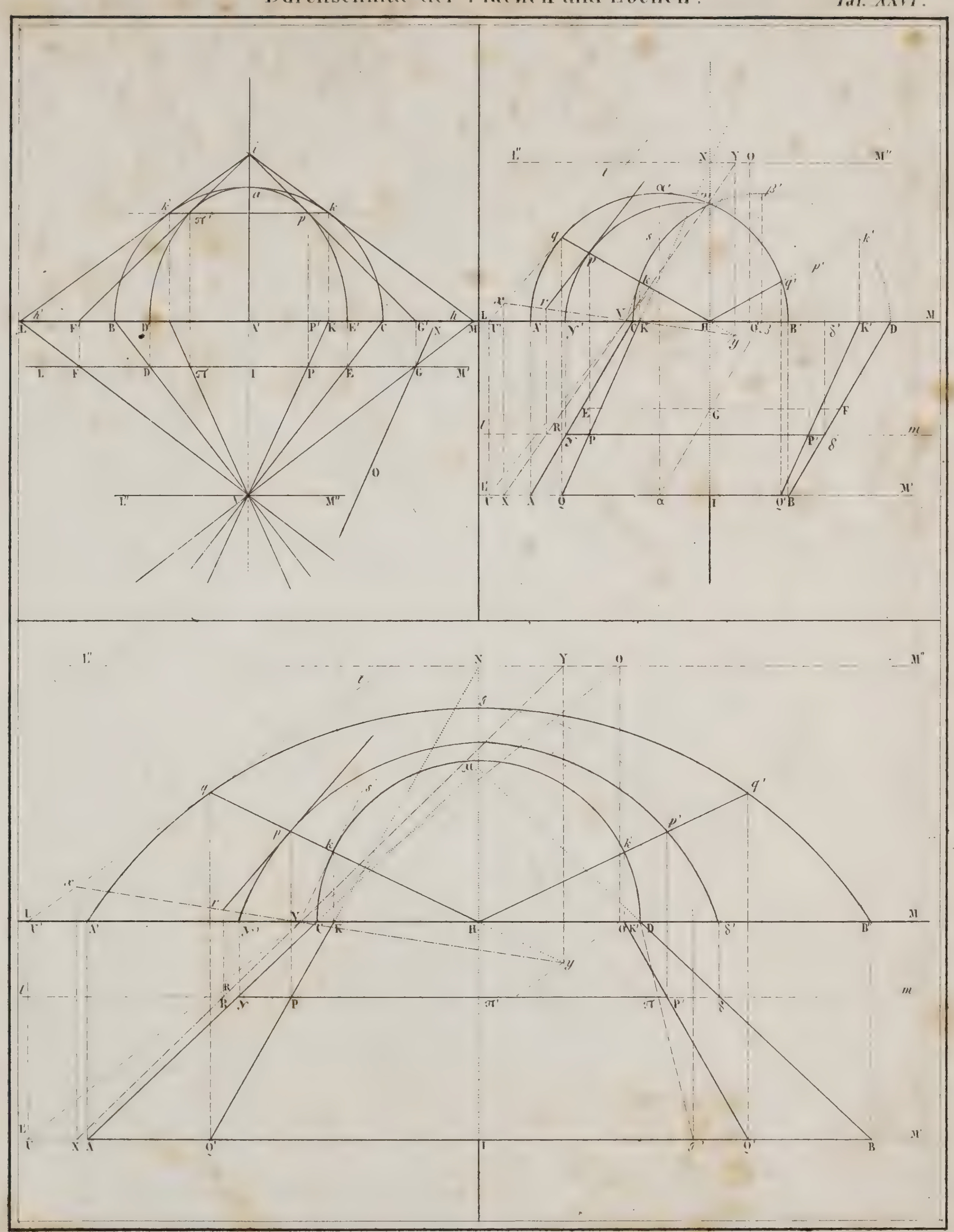


Durchschnitte der Flächen und Ebenen.



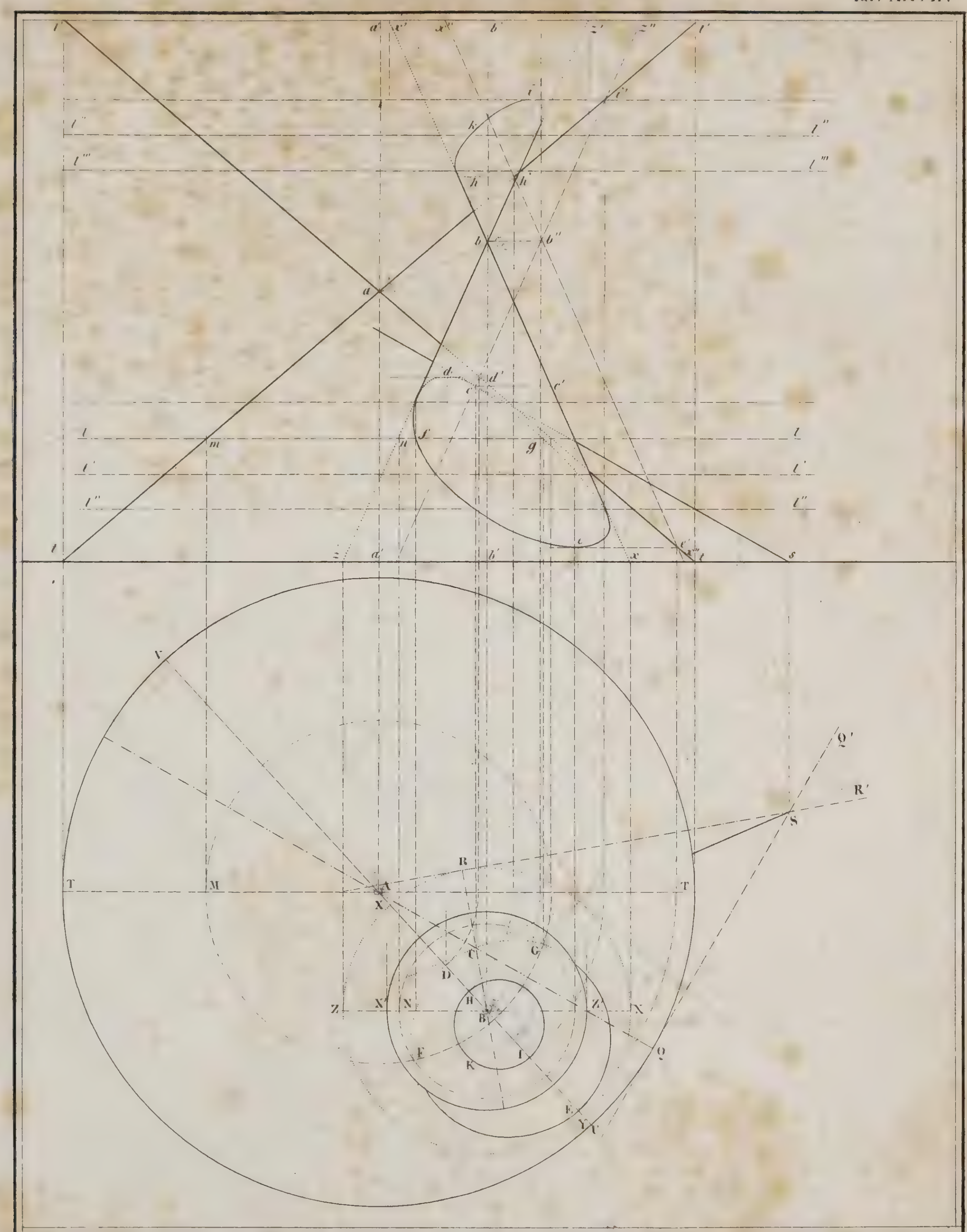


Durchschnitte der Flächen und Ebenen.

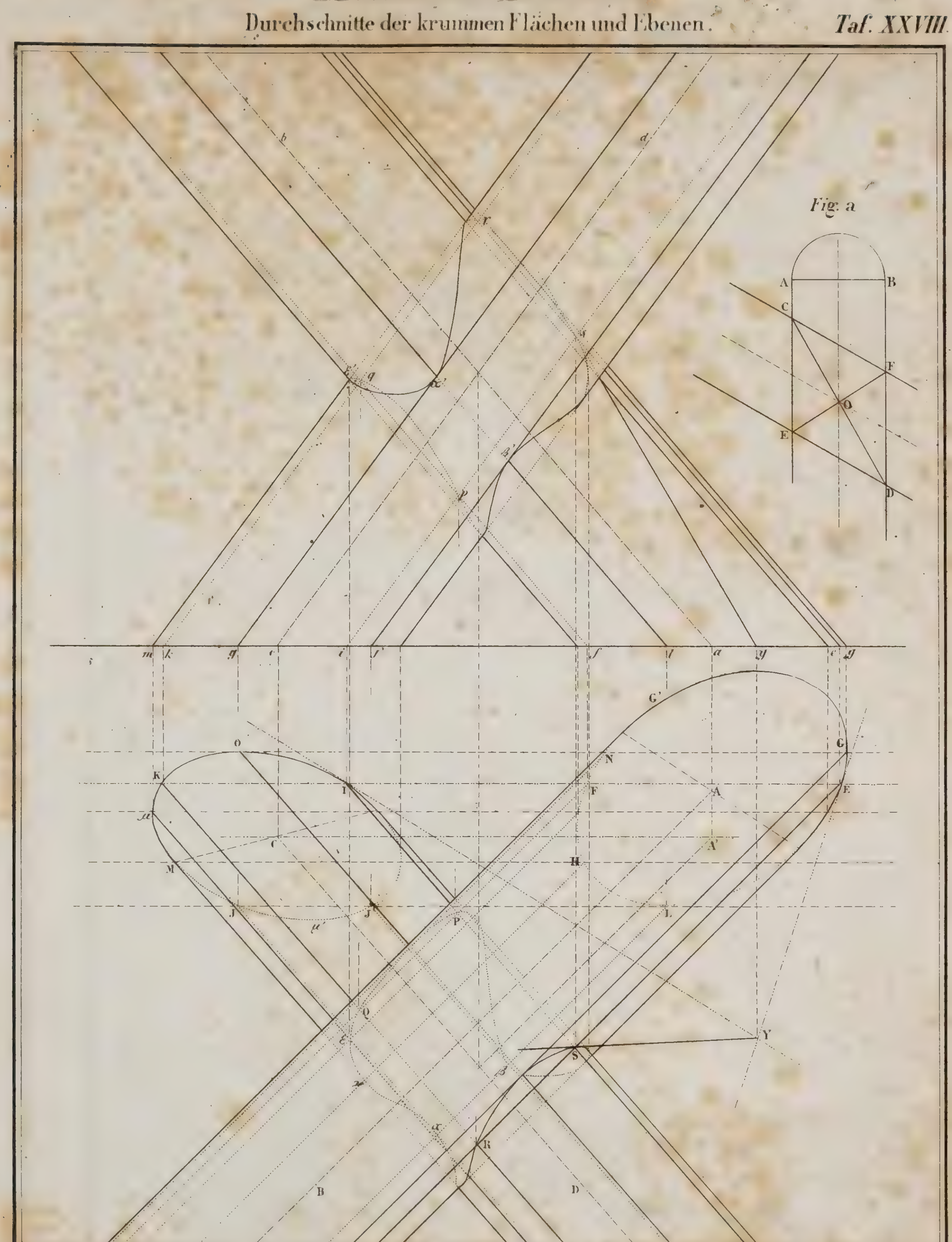




Durchschnitte krummer Flächen.






Fig. a
A
B
C
F
O
E
D
r
q
s
p
m
k
g
i
f
l
a
y
e
G'
G
O
K
N
I
F
A
E
μ
C
A'
M
H
J
J
P
L
μ'
Q
Y
S
R
B
D

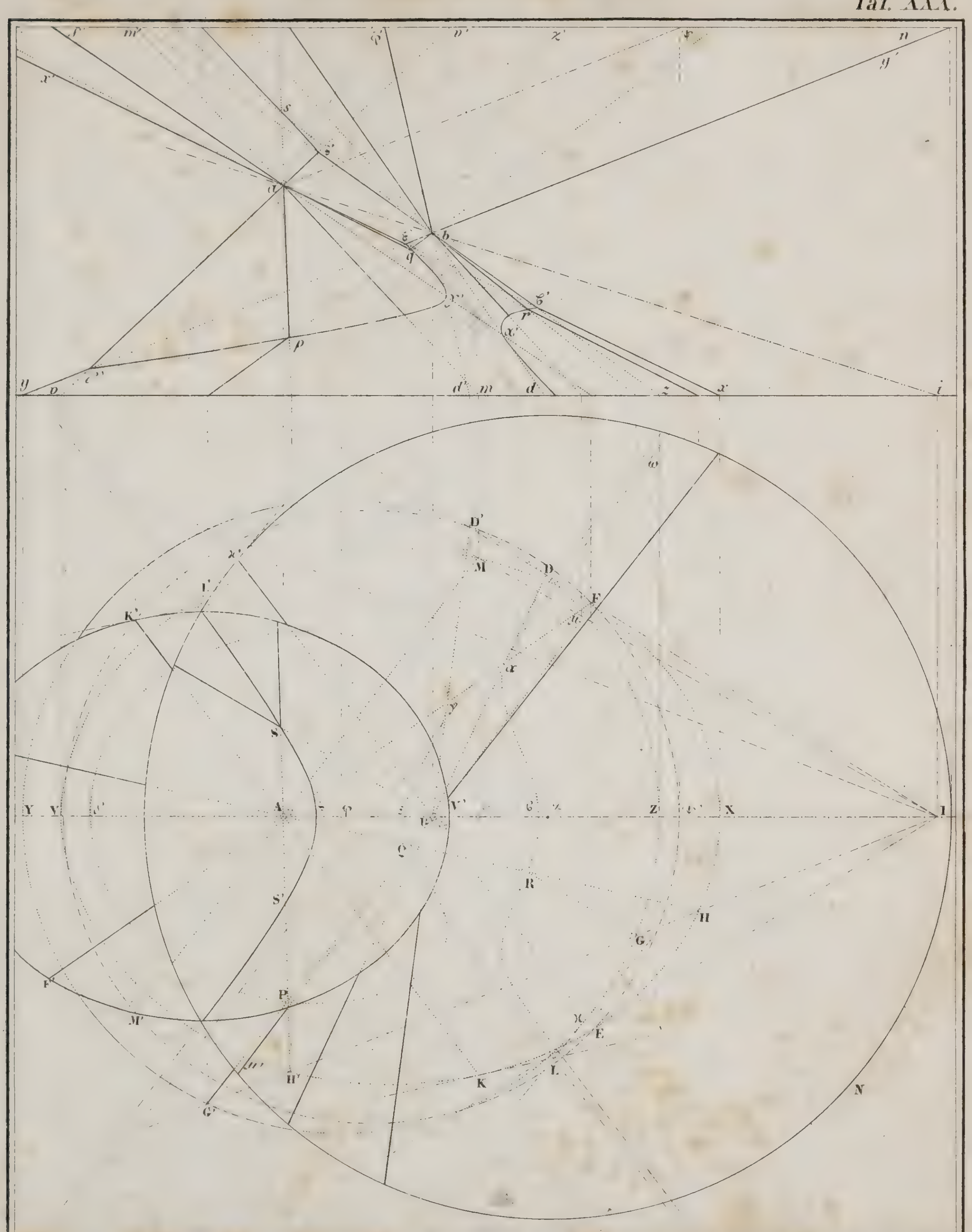


Durchschnitte krummer Flächen.



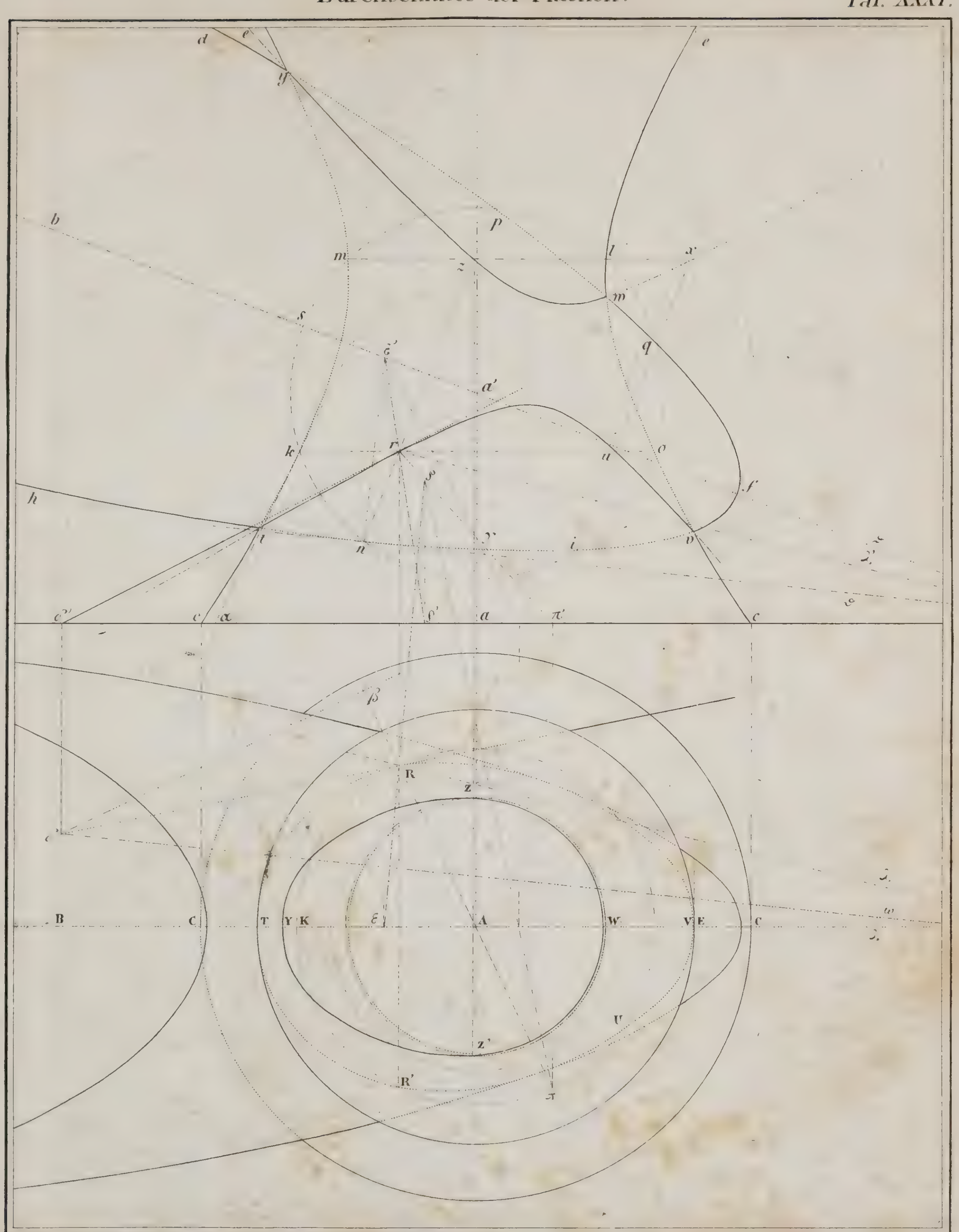


Durchschnitte krummer Flächen.





Durchschnitte der Flächen.

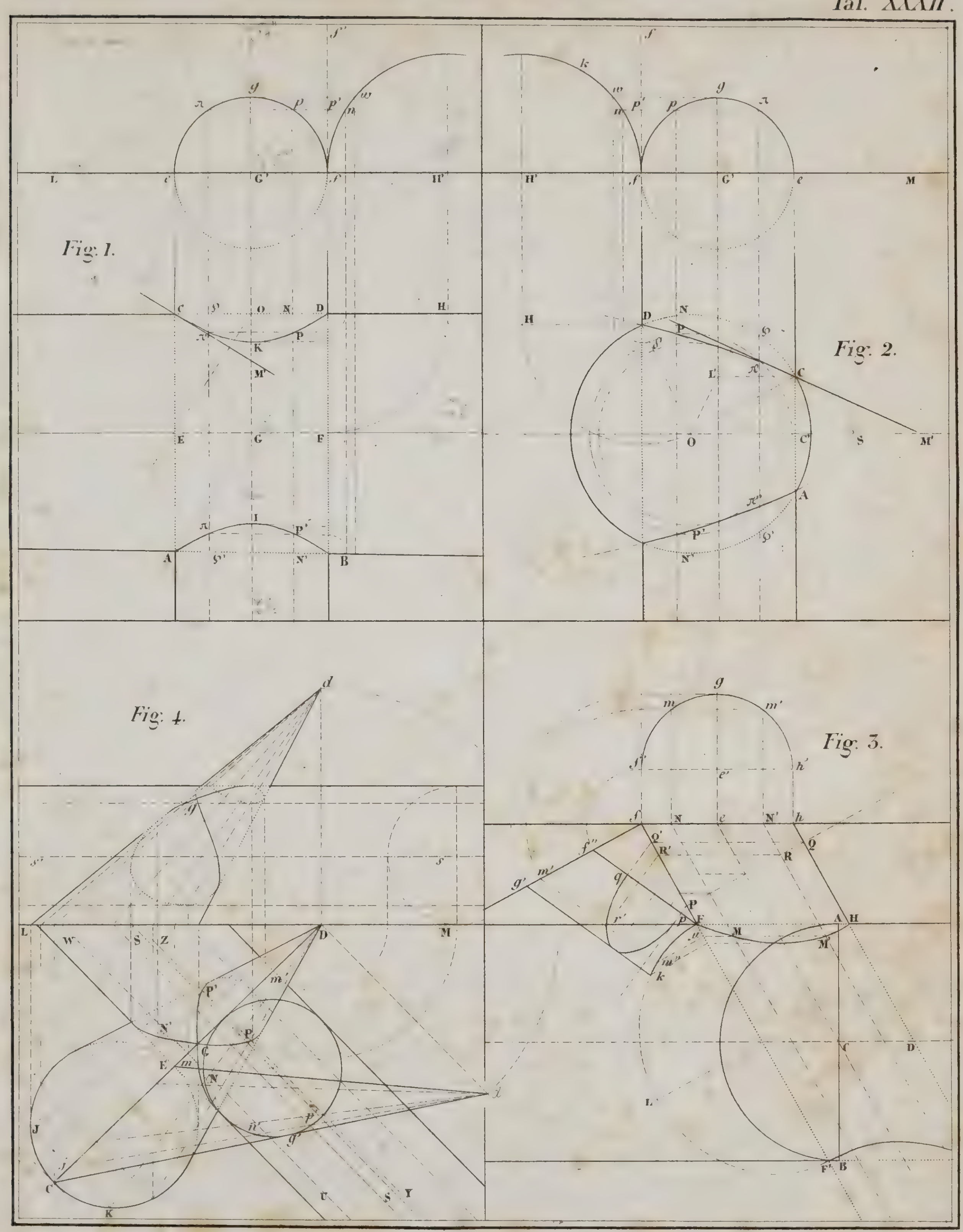




Darstellende Geometrie.

Durchschnitte der Flächen.

Taf. XXXII.





Durchschnitte der Flächen.

